マクスウェルの方程式

1st 2011/04/22
Lst 2021/12/19

電磁気学の偉人マップ

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \bullet d\vec{s}$$
アンペア–マクスウェルの法則

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s}$$
ファラデーの法則

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q$$
ガウスの法則

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$
ビオ–サバールの法則

$c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] 光速
$e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ [C] 素電荷

$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}l$ フレミング左手則

$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$ ローレンツ力

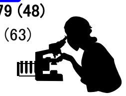
$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ フレミング右手則

$R = \rho \frac{l}{S}$　$C = \frac{Q}{V}$　$L = \frac{\varphi}{I}$

$I = \frac{dQ}{dt}$　$E = IR$ オームの法則

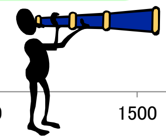
$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$
クーロンの法則

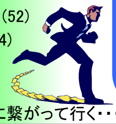
ミリカン 1868–1953 (85)
ヘルツ 1857–1894 (37)
テスラ 1856–1943 (87)
ローレンツ 1853–1928 (75)
フレミング 1849–1945 (96)
マクスウェル 1831–1879 (48)
キルヒホッフ 1824–1887 (63)
レンツ 1804–1865 (61)
ヘンリー 1797–1878 (81)
ファラデー 1791–1867 (76)
サバール 1791–1841 (50)
オーム 1789–1854 (65)
ガウス 1777–1855 (78)
エルステッド 1777–1851 (74)
アンペール 1775–1836 (61)
ビオ 1774–1862 (88)
ボルタ 1745–1827 (82)
クーロン 1736–1806 (70)
キャベンディッシュ 1731–1810 (79)
平賀源内 1728–1780 (52)
フランクリン 1706–1790 (84)
デュ・フェ 1698–1739 (41)
ギルバート 1544–1603 (59)



ミクロの
観察/観測

マクロの
観察/観測





どんな偉人も
先達の努力・
知恵・発見を
利用させても
らっている

※知恵はバトンリレーのように繋がって行く・・・

1400　1500　1600　1700　1800　1900　2000

1639　宗教・外交・貿易制限（いわゆる鎖国）→ 1854

電磁気学の学習体系

区別	定義（約束）	該当科目
静電気 （静電場）	磁場は考えない。 時間変化は考えない。	（初級） 電磁気学I 別名：電気力学
静磁気 （静磁場）	電場は考えない。 時間変化は考えない。	（中級） 電磁気学II 別名：磁気力学
動電磁気 （電磁場）	電場／磁場ともに考える。 時間変化も考える。	（上級） 電磁波工学 別名：電磁力学

動電気には交流回路、過渡現象、・・・　動電磁気にはアンテナ、高周波回路・・・
動磁気はトランス、交流モーター、・・・

電磁気学の体系整理

【電磁気＝空間3次元の問題】

電場と磁場の統一理論

（クーロン力・静電気）
「電磁気学」→「電磁気学Ｉ」＝電気力学＝静電場
（クーロン-ローレンツ力）→「電磁気学Ⅱ」＝磁気力学＝静磁場
（ローレンツ力・磁石）

電磁気学を『力学』と呼ぶ理由
電気エネルギー [J/m³] = [N/m²] = [Pa] ： 圧力・応力に等しい。
磁気エネルギー [J/m³] = [N/m²] = [Pa] ： 圧力・応力に等しい。

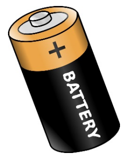
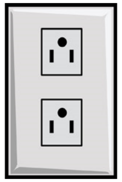
【電磁波＝4次元時空（空間3次元＋時間1次元）の問題】

電場と磁場と時間の統一理論

「電磁波工学」＝「電磁気学」＋「時間」＝動電磁場

例えば・・・ 直流回路は「空間1次元＋時間0次元」の1次元時空問題、
交流回路は「空間1次元＋時間1次元」の2次元時空問題、
電磁界は「空間3次元＋時間1次元」の4次元時空問題となる。
※次元が上がるほど変数が増えるのでより難しく感じるようになる。

電磁気学解析モデルの選択

静電場（電磁気学I）	低周波（電気回路）	過渡現象（電気回路）	高周波（電磁波）
			
$\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0$ (1)	$\vec{E}\sin\omega t$ (2)	$\vec{E}(t)$ (3)	$\vec{E}\sin\omega t$ (4)
電界と磁界が時間的に変化しない	電界と磁界（電磁界）は正弦的に時間変化するが、放射は無視できる	電磁界が任意に時間変化し、放射はあっても限定的でそれほど問題にならない	電磁界が正弦的に時間変化し、エネルギーは放射を通して伝達される

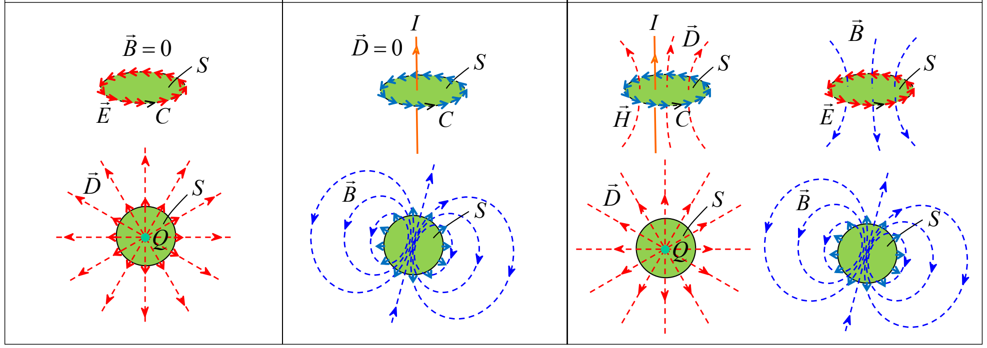
全てを網羅する(4)式を使うことは理想だが，特定の制約条件が適用できる場合は簡略化した方が解析的（数学的）に扱いやすい

https://www.kesco.co.jp/comsol/training-sp/index.html#20151204keynote

COMSOL

電場・磁場・電磁場・ベクトル場とは？

電場（または電界）	磁場（または磁界）	電磁場（または電磁界）



- 静電場のルール
- 静電荷
- 時間変化なし
- 保存場の性質
- ガウスの法則

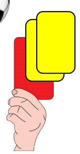
- 静磁場のルール
- 磁石（ループ電流）
- 時間変化なし
- アンペアの法則
- 磁場ガウスの法則

- 電磁場のルール
- 変動電荷（交流電流）
- 時間変化あり
- マクスウェル方程式

場や界 (Field) とは何か？

サッカー場

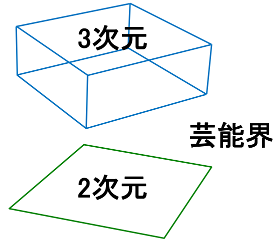
- サッカールール
- サッカーボール
- 11人制
- 前後半制
- ハンド
- オフサイド
- PK
- CK
- ゴールポスト
- 観戦マナー



野球場

- 野球ルール
- 野球ボール
- 9人制
- 9回表裏制
- デッドボール
- フォアボール
- スリーアウト
- 観戦マナー

場 (Field)



特定のルール＝秩序・法則）が適用される時空間

問：与えられた時空のルールを知らなかったり，無視して破ったときに結果がどうなるかは自明。
先人の言葉；TPO (Time, Place, Occasion)：時と場所と場合(条件)を弁えよ。郷に入れば郷に従え・・・など。

電磁気学法則間の上位互換性

マクスウェルの方程式（電磁気学の最上位バージョン※）

弱い力、強い力、重力を含んだ一般法則へ（未解明）

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$$
ファラデーの法則

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$$
アンペア−マクスウェルの法則

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$$
変位磁束

一般化（拡張）

$$\oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0$$
磁気ガウスの法則

一般化（拡張）

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$$
変位電流

静電界の基本方程式

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l}=0$$
保存場の性質（エネルギー保存則）

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=Q$$
ガウスの法則

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=I$$
アンペアの法則

静磁界の基本方程式

一般化（変形）

一般化（変形）

上位互換とは・・・Windows XPで動くソフトウェアは、Windows 7でも使えるイメージ

$$\vec{F}_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$$
クーロンの法則

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$
ビオ−サバールの法則

※ 上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなるが、様々な応用ができるようになる。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単だが、そのままでは応用されにくい。

4つの力の上位互換性

超ひも理論（最上位バージョン）・・・未完成

大統一理論・・・未完成

統一理論（電弱理論）

重力
一般相対性理論

電磁気力
マクスウェルの方程式

弱い力

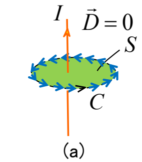
強い力

※ 上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなるが、様々な応用ができるようになる。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単だが、そのままでは応用されにくい。

久保田、五日市 ``磁力の科学'' p.109, B&Tブックス 日刊工業新聞社

電磁界方程式（積分形：integral form）

Static magnetic field



(a)

アンペアの法則
Ampere's law

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = I$$

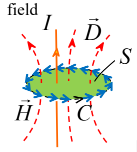
[A/m][m]=[A]
[N/Wb][m]=[J/Wb]

$\vec{F}_m = Q_m\vec{H}$
単位磁荷（もしあれば）あたりの仕事

閉路Cに沿って磁界を一周積分すると、閉路内部に含まれる電流に等しい。

↓拡張

Electromagnetic field



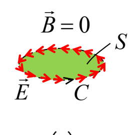
(a)'

アンペア-マクスウェルの法則（拡張アンペアの法則）
Ampere-Maxwell's law

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$$

閉路Cに沿って磁界を一周積分すると、閉路内部に含まれる電束の時間変化と伝導電流に等しい。

Electrostatic field



(c)

保存場の性質
Conservative field

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = 0$$

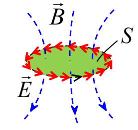
[V/m][m]=[V]
[N/C][m]=[J/C]

$\vec{F}_e = q\vec{E}$
単位電荷あたりの仕事

閉路Cに沿って電界を一周積分する（＝した仕事とされる仕事の和）と、ゼロになる。

↓拡張

Electromagnetic field



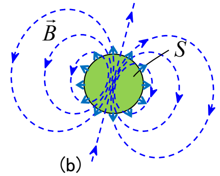
(c)'

ファラデーの法則
Faraday's law

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$$

閉路Cに沿って電界を一周積分すると、閉路内部に含まれる磁束の時間変化に等しい。

Static magnetic field & Electromagnetic field



(b)

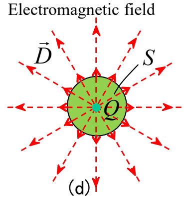
磁束密度に関するガウスの法則
Gauss's law on the magnetic flux

$$\oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = 0$$

[Wb/m²][m²]=[Wb]

閉面S上で磁束を総和すると、ゼロになる。（磁荷は単独で存在しない）

Electrostatic field & Electromagnetic field



(d)

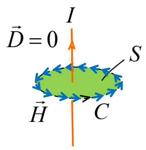
ガウスの法則
Gauss's law

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q$$

[C/m²][m²]=[C]

閉面S上で電束を総和すると、閉面内部に含まれる真電荷に等しい。

電磁界方程式（微分形：differential form）



(a)

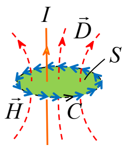
アンペアの法則
Ampere's law

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

[1/m][A/m]=[A/m²]
[1/m][N/Wb]=[N/Wbm]

磁界のローテーションをとると電流密度になる。

↓拡張

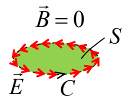


(a)'

アンペア-マクスウェルの法則（拡張アンペアの法則）
Ampere-Maxwell's law

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

磁界のローテーションをとると、電束密度の時間変化と電流密度になる。



(c)

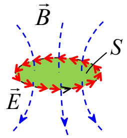
保存場の性質
Conservative field

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

[1/m][V/m]=[V/m²]
[1/m][N/C]=[N/Cm]

電界のローテーションをとると、ゼロになる。

↓拡張

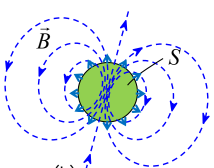


(c)'

ファラデーの法則
Faraday's law

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

電界のローテーションをとると、磁束密度の時間変化（減少方向）になる。



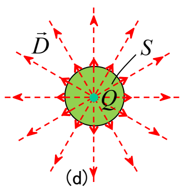
(b)

磁束密度に関するガウスの法則
Gauss's law on the magnetic flux

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

[1/m][Wb/m²]=[Wb/m³]

磁束密度の発散は、ゼロになる。（磁荷は単独で存在しない）



(d)

ガウスの法則
Gauss's law

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

[1/m][C/m²]=[C/m³]

電束密度の発散は、真電荷密度に等しい。

※微分形の導出は積分形の方程式に次の定理（ストークスの定理とガウスの発散定理）を使う。

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right)\bullet d\vec{s} = \oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} \quad \text{:Stokes's theorem} \qquad \int_V \nabla \bullet \vec{A}\, dv = \oint_S \vec{A}\bullet d\vec{s} \quad \text{:Gauss's theorem}$$

積分形から微分形の導出（方法1）

アンペア-マクスウェルの法則より

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$$

左辺にストークスの定理を適用

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{H}\right)\bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$$

積分記号内を比較して

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ファラデーの法則も上記と同様にして

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q$$

左辺にガウスの定理を適用して

$$\int_V \nabla \bullet \vec{D}\, dv = Q$$

右辺を電荷密度 ρ [C/m³] で表現すると

$$\int_V \nabla \bullet \vec{D}\, dv = \int_V \rho\, dv$$

積分記号内を比較して

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

磁気ガウスの法則も上記と同様にして

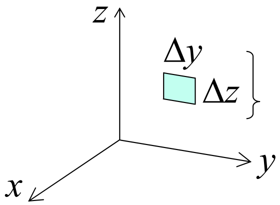
$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

問：なぜ積分形そのままではなく微分形を使うか？

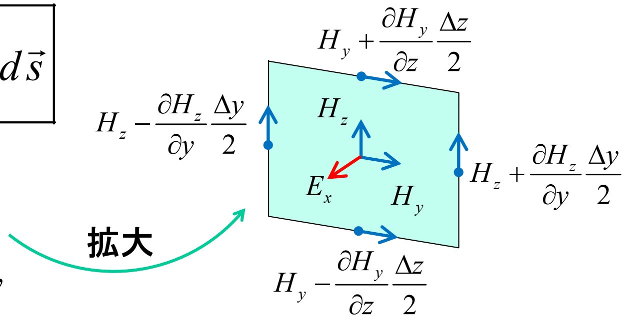
積分形から微分形の導出（方法2）

積分を微小領域で直接計算する方法（アンペア-マクスウェルの法則）

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s}}$$



拡大



左辺

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z - \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y - \left(H_z - \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) \equiv (\nabla\times\vec{H})_x$$

単位面積当たりの循環の極限値

右辺

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s} = \int_S \frac{\partial D_x}{\partial t}ds = \frac{\partial D_x}{\partial t}\Delta y\Delta z$$

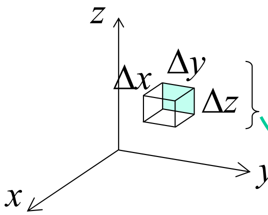
左辺=右辺より

$$\boxed{(\nabla\times\vec{H})_x = \frac{\partial D_x}{\partial t}}$$

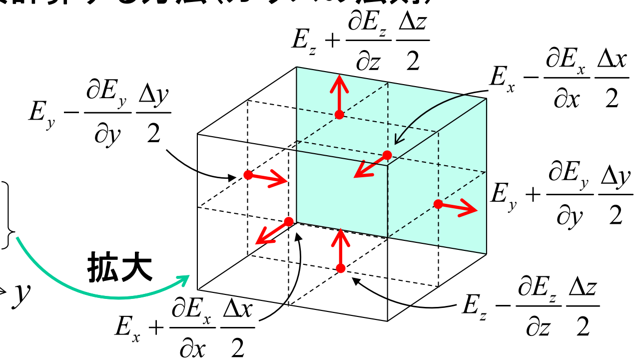
積分形から微分形の導出（方法2）

積分を微小領域で直接計算する方法（ガウスの法則）

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} = 0}$$



拡大



左辺

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} = \left[\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right) - \left(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta y\Delta z + \left[\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) - \left(E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta z\Delta x$$

$$+ \left[\left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right) - \left(E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\right]\Delta x\Delta y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \equiv \nabla\bullet\vec{E}$$

単位体積当たりの流束の極限値

左辺=右辺より

$$\boxed{\nabla\bullet\vec{E} = 0}$$

マクスウェルの方程式

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s} \\ \oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s} \\ \oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q \\ \oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

⟷ どちらでも同じ意味

微分形

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\bullet\vec{D} = \rho \\ \nabla\bullet\vec{B} = 0 \end{cases}$$

例）

$$\boxed{\int dy = \int x dx} \Leftrightarrow dy = x dx \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = x}$$

未知関数 y を求める方程式に違いはない

簡単化したマクスウェルの方程式

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s} \\ \oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s} \\ \oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = 0 \\ \oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

⟷ どちらでも同じ意味

微分形

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\bullet\vec{D} = 0 \\ \nabla\bullet\vec{B} = 0 \end{cases}$$

簡単化のために，伝導電流と自由電荷を考えない条件を課してみる（J=0，Q=0）。ただし、微分形では微小領域、微小時間という制約が付く。

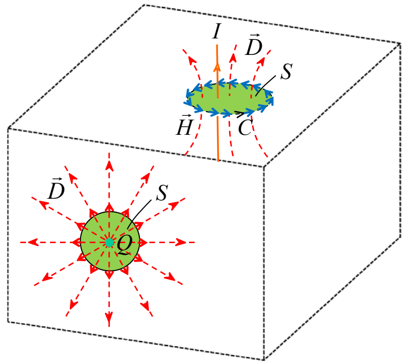
簡単化とは？

面倒（上級）

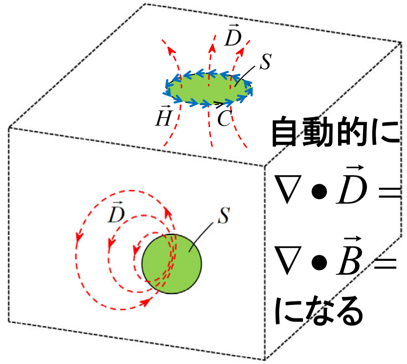
$$\begin{cases} \vec{J} \neq 0 \\ Q \neq 0 \end{cases}$$

簡単化（初級）

$$\begin{cases} \vec{J} = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$



波源を含む領域
（電荷の発散や電流源がある）



自動的に

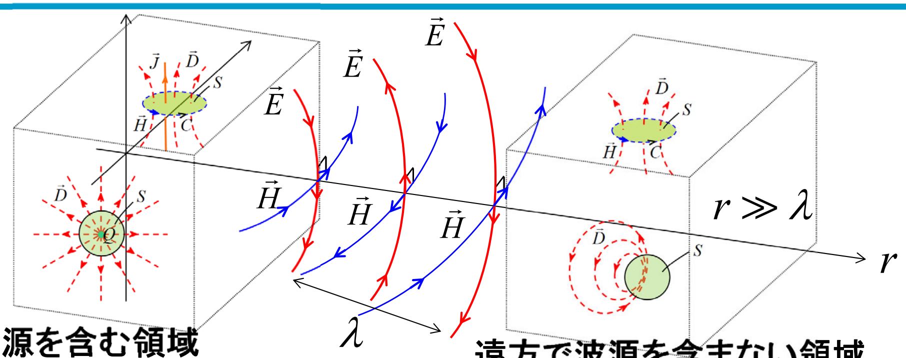
$\nabla \bullet \vec{D} = 0$

$\nabla \bullet \vec{B} = 0$

になる

遠方で波源を含まない領域
（無損失で電荷の発散もない）

無損失，電荷を含まない方程式とは？



波源を含む領域
（電荷の発散や電流源がある）

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

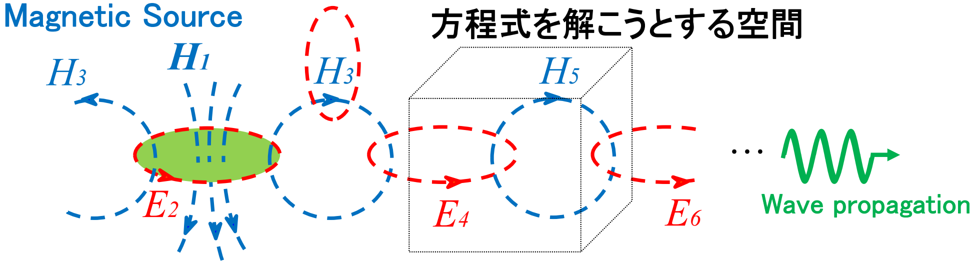
遠方で波源を含まない領域
（無損失で電荷の発散もない）

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \bullet \vec{D} = 0$$
$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

雨宮好文 ``現代　電磁波工学'' p.85, オーム社

マクスウェルの方程式のイメージ

Magnetic Source

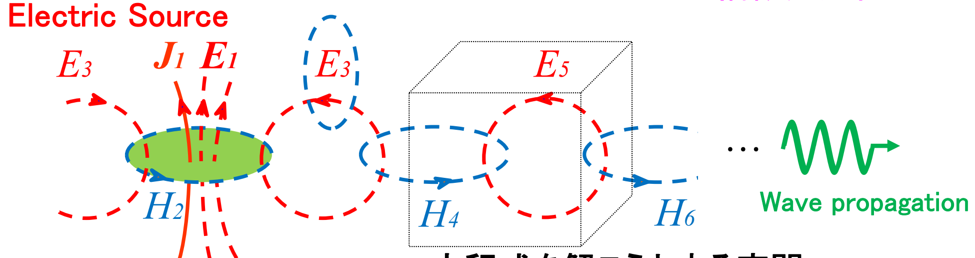


磁界を源泉とする波と電界（電流）を源泉とする波では偏波が異なる。

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E} \end{aligned}\right\}$$

E, H に関するベクトル連立一次偏微分方程式

Electric Source



方程式を解こうとする空間

問. 禿び、禿げの意味は？

「マクスウェルの方程式」を英語で

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}$$

The rotation of H equals the partial of D with respect to t plus J, the rotation of E equals minus the partial of B with respect to t, the divergence of D equals rho, the divergence of B equals zero.

保江 “数学版これを英語で言えますか？” p.258, BLUE BACKS