

マクスウェルの方程式

1st 2011/04/22

Lst 2023/04/26

電磁気学の偉人マップ

$c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] 光速 **ミリカン 1868-1953 (85)**
 $e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ [C] 素電荷 **ヘルツ 1857-1894 (37)**
テスラ 1856-1943 (87)
トムソン 1856-1940 (84)
ローレンツ 1853-1928 (75)
フレミング 1849-1945 (96)
マクスウェル 1831-1879 (48)
キルヒホッフ 1824-1887 (63)
レンツ 1804-1865 (61)
ヘンリー 1797-1878 (81)
ファラデー 1791-1867 (76)
サバル 1791-1841 (50)
オーム 1789-1854 (65)
ガウス 1777-1855 (78)
エルステッド 1777-1851 (74)
アンペール 1775-1836 (61)
ビオ 1774-1862 (88)
ボルタ 1745-1827 (82)
クーロン 1736-1806 (70)
キャベンディッシュ 1731-1810 (79)
平賀源内 1728-1780 (52)
フランクリン 1706-1790 (84)
デュ・フェ 1698-1739 (41)
ギルバート 1544-1603 (59)

アンペール-マクスウェルの法則
 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$
ファラデーの法則
 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$
ガウスの法則
 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$
ビオ-サバルの法則
 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

フレミング左手則
 $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$
フレミング右手則
 $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$

ローレンツ力
 $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$

オームの法則
 $R = \rho \frac{l}{S}$ $C = \frac{Q}{V}$ $L = \frac{\phi}{I}$
 $E = IR$
 $I = \frac{dQ}{dt}$

クーロンの法則
 $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$

ミクロの観察/観測
マクロの観察/観測

どんな偉人も先達の努力・知恵・発見を利用している。

電磁気学の学習体系

区別	定義(約束)	該当科目
静電気 (静電場)	磁場は考えない。 時間変化は考えない。	(初級) 電磁気学I 別名: 電気力学
静磁気 (静磁場)	電場は考えない。 時間変化は考えない。	(中級) 電磁気学II 別名: 磁気力学
動電磁気 (電磁場)	電場/磁場ともに考える。 時間変化も考える。	(上級) 電磁波工学 別名: 電磁力学

動電気には交流回路、過渡現象、... **動電磁気**にはアンテナ、高周波回路、...
動磁気はトランス、交流モーター、...

電磁気学の体系整理

【電磁気=空間3次元の問題】

○電場と磁場の統一理論 (クーロン力・静電気)
「電磁気学」
(クーロン・ローレンツ力) $\left\{ \begin{array}{l} \text{「電磁気学 I」} = \text{電気力学} = \text{静電場} \\ \text{「電磁気学 II」} = \text{磁気力学} = \text{静磁場} \end{array} \right.$ (ローレンツ力・磁石)

電磁気学を『力学』と呼ぶ理由


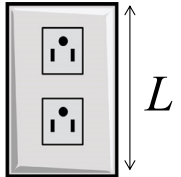


{ 電気エネルギー [J/m³] = [N/m²] = [Pa] : 圧力・応力と等価
磁気エネルギー [J/m³] = [N/m²] = [Pa] : 圧力・応力と等価

【電磁波=4次元時空(空間3次元+時間1次元)の問題】

○電場と磁場と時間の統一理論
「電磁波工学」=「電磁気学」+「時間」=動電磁場
・直流回路は「空間1次元+時間0次元」の1次元時空問題
・交流回路は「空間1次元+時間1次元」の2次元時空問題
・電磁界は「空間3次元+時間1次元」の4次元時空問題
※次元が上がるほど変数が増えるのでより難解になる。

電磁気学解析モデルの選択

5

静電場 (電磁気学I)	低周波 (電気回路)	過渡現象 (電気回路)	高周波 (電磁波)
			
$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ (1)	$\vec{E} \sin \omega t$ ($L \ll \lambda$) (2)	$\vec{E}(t)$ ($t \approx 0$) (3)	$\vec{E} \sin \omega t$ ($L \approx \lambda$) (4)
電界と磁界が時間的に変化しない。	電界と磁界(電磁界)は正弦的に時間変化するが、放射は無視できる。	電磁界が任意に時間変化し、放射はあっても限定的でそれほど問題にならない。	電磁界が正弦的に時間変化し、エネルギーは放射を通して伝達される。

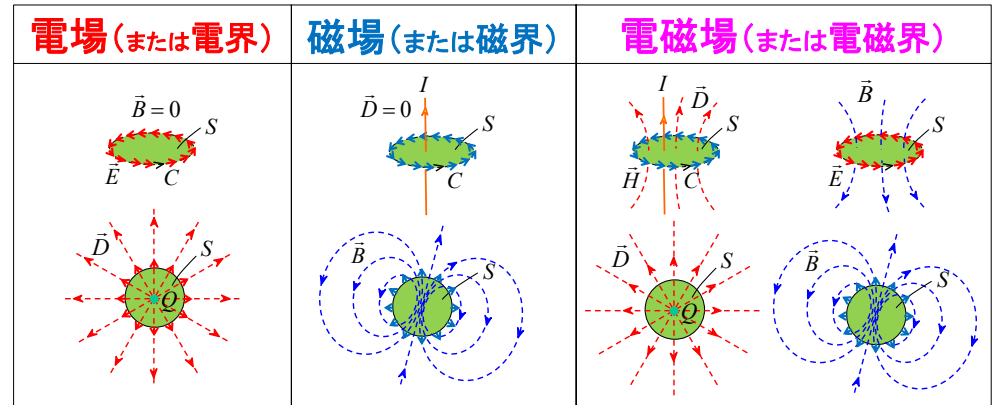
全てを網羅する(4)式を使うことは理想だが、特定の制約条件が適用できる場合は簡略化した方が解析的(数学的)に扱いやすい。

<https://www.kesco.co.jp/comsol/training-sp/index.html#20151204keynote>



電場・磁場・電磁場・ベクトル場とは？

6



- **静電場のルール**
 - 静電荷
 - 時間変化なし
 - 保存場の性質
 - ガウスの法則
- **静磁場のルール**
 - 磁石(ループ電流)
 - 時間変化なし
 - アンペアの法則
 - 磁場ガウスの法則
- **電磁場のルール**
 - 変動電荷(交流電流)
 - 時間変化あり
 - マクスウェル方程式

場や界(Field)とは何か？

7

サッカー場



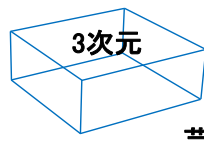
- **サッカールール**
- サッカーボール
- ゴールポスト
- 11人制
- 前後半制
- ハンド
- オフサイド
- PK
- CK
- 観戦マナー

野球場



- **野球ルール**
- 野球ボール
- 9人制
- 9回表裏制
- デッドボール
- フォアボール
- スリーアウト
- 観戦マナー

場(Field)



芸能界

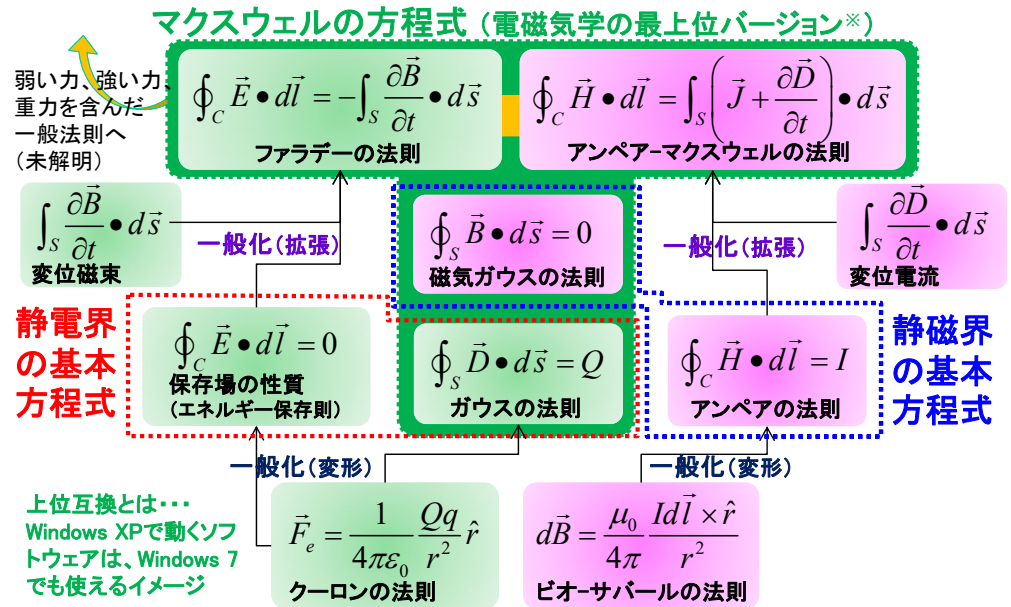
特定のルール=秩序・法則が適用される時空間



与えられた時空のルールを知らなかったり、無視して破ったときに何が起きるか？→ペナルティー
先人の言葉; TPO (Time, Place, Occasion): 時と場所と場合(条件)を弁えよ。郷に入れば郷に従え...など。

電磁気学法則間の上位互換性

8



※ 上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなるが、様々な応用ができるようになる。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単だがそのままでは応用されにくい。

4つの力の上位互換性

超ひも理論(最上位バージョン)・・・未完成

大統一理論・・・未完成

統一理論(電弱理論)

重力
一般相対性
理論

電磁気力
マクスウェル
の方程式

弱い力

強い力

※ 上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなるが、様々な応用ができるようになる。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単だが、そのままでは応用されにくい。

久保田, 五日市, 磁力の科学, p.109, B&Tブックス, 日刊工業新聞社

電磁界方程式 (積分形: integral form)

<p>Static magnetic field</p> <p>(a)</p> <p>↓ 拡張</p>	<p>アンペアの法則 Ampere's law</p> $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ <p>[A/m][m]=[A] [N/Wb][m]=[J/Wb]</p> <p>単位磁荷(あれば)あたりの仕事</p> <p>閉路Cに沿って磁界を一周積分すると、閉路内部に含まれる電流に等しい。</p>	<p>Electrostatic field</p> <p>(c)</p> <p>↓ 拡張</p>	<p>保存場の性質 Conservative field</p> $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ <p>[V/m][m]=[V] [N/C][m]=[J/C]</p> <p>単位電荷あたりの仕事</p> <p>閉路Cに沿って電界を一周積分する(=した仕事とされる仕事の和)と、ゼロになる。</p>
<p>Electromagnetic field</p> <p>(a')</p>	<p>アンペア-マクスウェルの法則 (拡張アンペアの法則) Ampere-Maxwell's law</p> $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$ <p>閉路Cに沿って磁界を一周積分すると、閉路内部に含まれる電束の時間変化と伝導電流に等しい。</p>	<p>Electromagnetic field</p> <p>(c')</p>	<p>ファラデーの法則 Faraday's law</p> $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$ <p>閉路Cに沿って電界を一周積分すると、閉路内部に含まれる磁束の時間変化に等しい。</p>
<p>Static magnetic field & Electromagnetic field</p> <p>(b)</p>	<p>磁束密度に関する ガウスの法則 Gauss's law on the magnetic flux</p> $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ <p>[Wb/m²][m²]=[Wb]</p> <p>閉面S上で磁束を総和すると、ゼロになる。(磁荷は単独で存在しない)</p>	<p>Electrostatic field & Electromagnetic field</p> <p>(d)</p>	<p>ガウスの法則 Gauss's law</p> $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ <p>[C/m²][m²]=[C]</p> <p>閉面S上で電束を総和すると、閉面内部に含まれる真電荷に等しい。</p>

電磁界方程式 (微分形: differential form)

<p>↓ 拡張</p> <p>アンペアの法則 Ampere's law</p> $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ <p>[1/m][A/m]=[A/m²] [1/m][N/Wb]=[N/Wbm]</p> <p>磁界のローテーションをとると、電流密度になる。</p>	<p>↓ 拡張</p> <p>アンペア-マクスウェルの法則 (拡張アンペアの法則) Ampere-Maxwell's law</p> $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ <p>磁界のローテーションをとると、電束密度の時間変化と電流密度になる。</p>	<p>保存場の性質 Conservative field</p> $\nabla \times \vec{E} = 0$ <p>[1/m][V/m]=[V/m²] [1/m][N/C]=[N/Cm]</p> <p>電界のローテーションをとると、ゼロになる。</p>	<p>↓ 拡張</p> <p>ファラデーの法則 Faraday's law</p> $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ <p>電界のローテーションをとると、磁束密度の時間変化(減少方向)になる。</p>
<p>磁束密度に関する ガウスの法則 Gauss's law on the magnetic flux</p> $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ <p>[1/m][Wb/m²]=[Wb/m³]</p> <p>磁束密度の発散は、ゼロになる。(磁荷は単独で存在しない)</p>	<p>ガウスの法則 Gauss's law</p> $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ <p>[1/m][C/m³]=[C/m³]</p> <p>電束密度の発散は、真電荷密度に等しい。</p>		

※ 微分形の導出は積分形の方程式に次の定理(ストークスの定理とガウスの発散定理)を使う。

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad : \text{Stokes's theorem} \quad \int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad : \text{Gauss's theorem}$$

積分形から微分形の導出1

アンペア-マクスウェルの法則より

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

左辺にストークスの定理を適用

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

積分記号内を比較して

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ファラデーの法則も上記と同様に

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

左辺にガウスの定理を適用して

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dv = Q$$

右辺を電荷密度 ρ [C/m³] で表現すると

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} \, dv = \int_V \rho \, dv$$

積分記号内を比較して

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

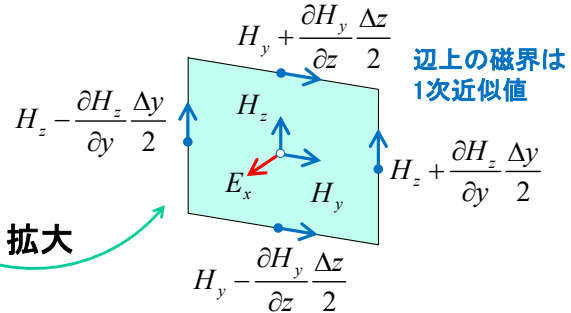
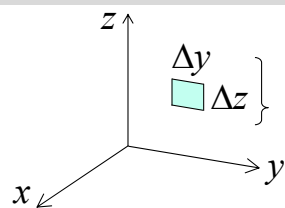
磁気ガウスの法則も上記と同様に

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

問: なぜ積分形そのままではなく微分形を使うか?

積分を微小領域で直接計算する方法(アンペア-マクスウェルの法則)

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$



拡大

左辺

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z - \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y - \left(H_z - \frac{\partial H_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z \\ &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \Rightarrow \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \equiv (\nabla \times \vec{H})_x \end{aligned}$$

右辺

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{\partial D_x}{\partial t} ds = \frac{\partial D_x}{\partial t} \Delta y \Delta z$$

単位面積当たりの循環の極限值

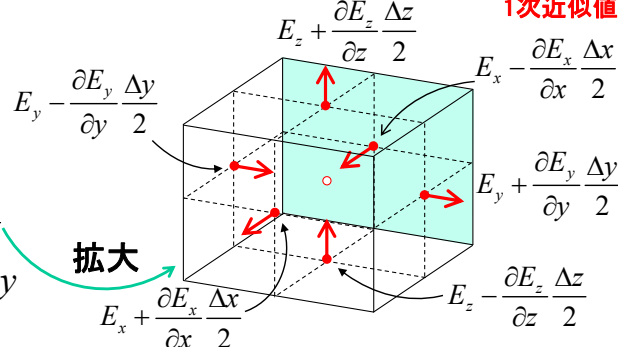
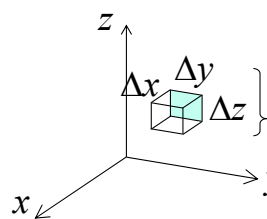
左辺=右辺より

$$(\nabla \times \vec{H})_x = \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

積分を微小領域で直接計算する方法(ガウスの法則)

面上の電界は1次近似値

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



拡大

左辺

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \left[\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y \Delta z + \left[\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) - \left(E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta z \Delta x \\ &+ \left[\left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) - \left(E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \equiv \nabla \cdot \vec{E}$$

単位体積当たりの流束の極限值

左辺=右辺より

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

マクスウェルの方程式

積分形

微分形

$$\begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

どちらも同じ意味

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

例)

$$\int dy = \int x dx$$

$$\longleftrightarrow dy = x dx \longleftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

積分方程式

微分方程式

未知関数 y を求める方程式に違いはない

簡単化したマクスウェルの方程式

積分形

微分形

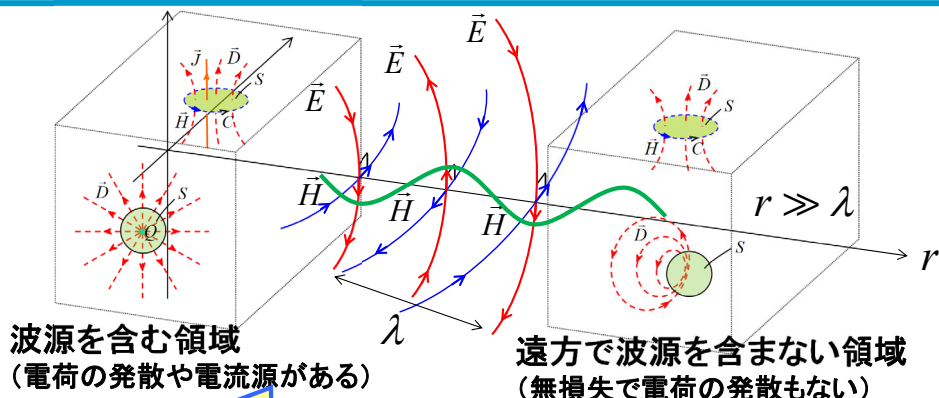
$$\begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

どちらも同じ意味

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

簡単化のために、伝導電流と自由電荷を考えない条件を課してみる(J=0, Q=0)。ただし、微分形では微小領域、微小時間という制約が付く。

波源を含まない方程式とは？



波源を含む領域
(電荷の発散や電流源がある)

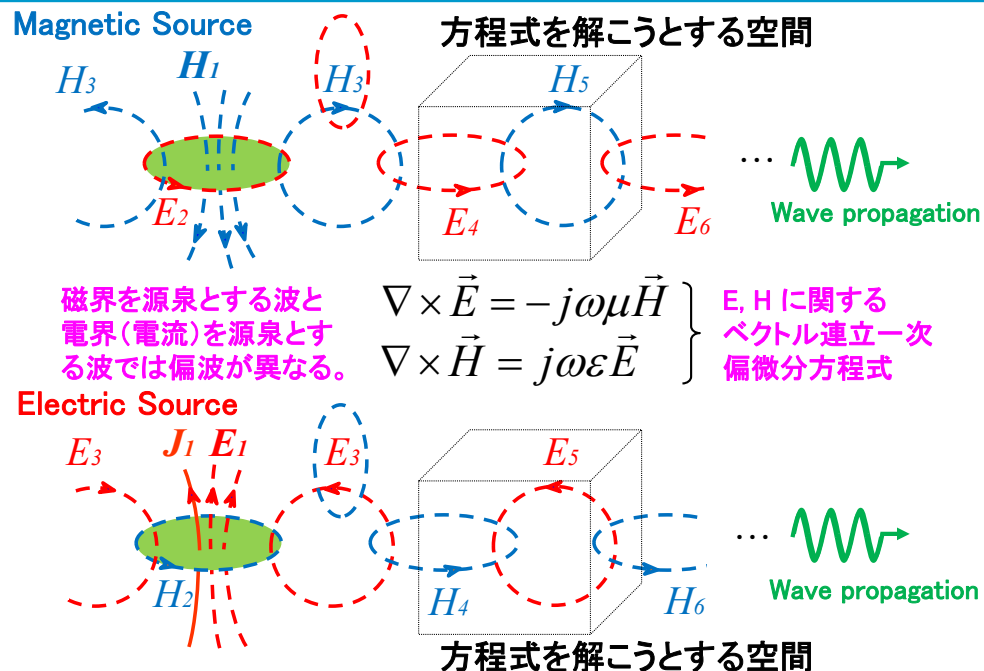
遠方で波源を含まない領域
(無損失で電荷の発散もない)

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

雨宮好文, 現代 電磁波工学, p.85, オーム社

マクスウェルの方程式のイメージ



磁界を源泉とする波と
電界(電流)を源泉とする
波では偏波が異なる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} E, H \text{ に関する} \\ \text{ベクトル連立一次} \\ \text{偏微分方程式} \end{array}$$

Electric Source

方程式を解こうとする空間

電磁気学単位系のまとめ

【演習】 次の物理量の名称と単位を答えよ。

Q 電荷 [C]	MS 磁荷 [Am]	V 電圧 [V]	W 電力量 [Wh] or [J]
\vec{E} 電界 [V/m] or [N/C]	\vec{B} 磁束密度 [T]	I 電流 [A]	R 抵抗 [Ω]
\vec{D} 電束密度 [C/m ²]	\vec{H} 磁界 [A/m]	P 電力 [W]	G コンダクタンス [S]
\vec{P} 分極 [C/m ²]	\vec{M} 磁化 [A/m]	ρ 抵抗率 [$\Omega \cdot m$] 電荷密度 [C/m ³]	C キャパシタンス [F]
ε 誘電率 [F/m]	μ 透磁率 [H/m]	σ 導電率 [S/m] 面電荷密度 [C/m ²]	L インダクタンス [H]
ε_r 比誘電率 [無]	μ_r 比透磁率 [無]	λ 波長 [m] 線電荷密度 [C/m]	Z インピーダンス [Ω]
\vec{J} 電流密度 [A/m ²]	Φ 磁束 [Wb]	ω 角周波数 [rad/s]	Y アドミタンス [S]
c 光速 [m/s]	φ 磁束鎖交数 [Wb]	f 周波数 [Hz]	X リアクタンス [Ω]
γ 伝搬定数	α 減衰定数 [Np/m]	θ 位相角 [rad] 電気長 [rad]	B サセプタンス [S]
k 波数 [rad/m]	β 位相定数 [rad/m]	\vec{S} ポインティングベクトル [W/m ²]	Γ 反射係数 [無]

「マクスウェルの方程式」を英語で

The rotation of H equals the partial of D with respect to t plus J, the rotation of E equals minus the partial of B with respect to t, the divergence of D equals rho, the divergence of B equals zero.

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right.$$