マクスウェルの方程式

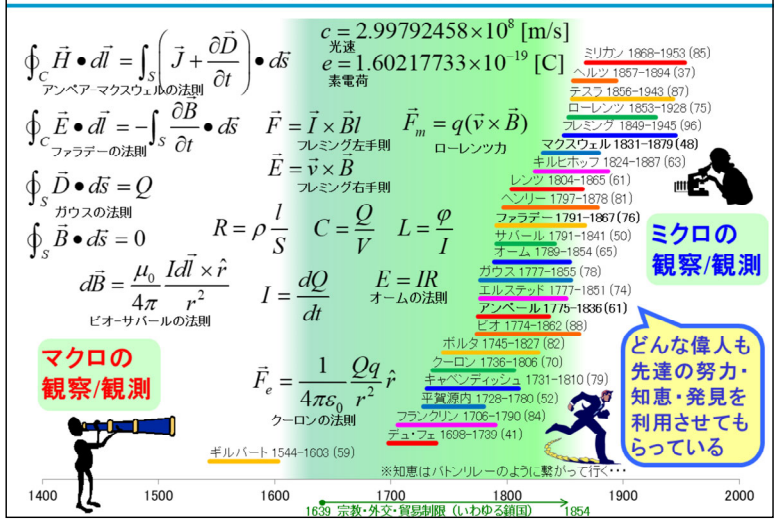
1st 2011/04/22
Lst 2021/12/19

マクスウェルの方程式は電磁気学の最上位に位置する支配方程式です。支配方程式というのは、考えている場で成立する法則・ルールのことです。

例えば、物体が落下したり我々が地球に張り付いて生きているのは重力場がニュートンの運動方程式に支配されているためです。

同様にして電磁場はマクスウェルの方程式に支配されていると言うことができます。マクスウェルの方程式には重力に関する記述がないので、電磁場と重力場を一緒にして扱うことはできません。これを一緒に扱うには、電磁気学よりもさらに上位の支配方程式とされる大統一理論や超ひも理論といった法則・ルールが必要になります。

電磁気学の偉人マップ



マクスウェルの方程式が発表されたのは1864年です。

マクスウェルが48年という生涯を掛けて一人で発明したのではなく、それよりも前の時代に生きた多くの先人研究者の成果という土台の上に積み上げられた成果です。

例えば、クーロンの法則を発表したクーロン、ガウスの法則を発表したガウス、アンペアの法則を発表したアンペール、ファラデーの法則を発表したファラデーといった偉人達の成果がなければ、マクスウェルの方程式が発表されることはなかったはずです。そのような意味で、どんな偉人も先達の努力・知恵・発見を利用させてもらっていると言えます。我々が今マクスウェルの方程式を学習し、携帯電話をはじめとする情報通信を利用することができるのも、先人の成果を利用させてもらっているという真摯な態度が必要です。

電磁気学の学習体系

3

区別	定義（約束）	該当科目
静電気（静電場）	磁場は考えない。 時間変化は考えない。	（初級） 電磁気学I 別名：電気力学
静磁気（静磁場）	電場は考えない。 時間変化は考えない。	（中級） 電磁気学II 別名：磁気力学
動電磁気（電磁場）	電場／磁場ともに考える。 時間変化も考える。	（上級） 電磁波工学 別名：電磁力学

動電気には交流回路、過渡現象、・・・　動電磁気にはアンテナ、高周波回路・・・
動磁気はトランス、交流モーター、・・・

静磁界の定義として正しいのは

(a) E と ∂／∂t は考えない (b) E, H 両方と ∂／∂t を考える (c) ∂／∂t は考えない, (d) H と ∂／∂t は考えない,

電磁気学の体系整理

4

【電磁気＝空間3次元の問題】

電場と磁場の統一理論

「電磁気学」（クーロン-ローレンツ力）
→「電磁気学Ⅰ」＝電気力学＝静電場（クーロン力・静電気）
→「電磁気学Ⅱ」＝磁気力学＝静磁場（ローレンツ力・磁石）

電磁気学を『力学』と呼ぶ理由
電気エネルギー [J/m^3] = [N/m^2] = [Pa] ： 圧力・応力に等しい。
磁気エネルギー [J/m^3] = [N/m^2] = [Pa] ： 圧力・応力に等しい。

【電磁波＝4次元時空（空間3次元＋時間1次元）の問題】

電場と磁場と時間の統一理論

「電磁波工学」＝「電磁気学」＋「時間」＝動電磁場

例えば・・・直流回路は「空間1次元＋時間0次元」の1次元時空問題、
交流回路は「空間1次元＋時間1次元」の2次元時空問題、
電磁界は「空間3次元＋時間1次元」の4次元時空問題となる。
※次元が上がるほど変数が増えるのでより難しく感じるようになる。

空間3次元＋時間1次元の問題を，何次元時空問題と呼ぶか。

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

電磁気学解析モデルの選択

5

静電場 （電磁気学I）	低周波 （電気回路）	過渡現象 （電気回路）	高周波 （電磁波）
$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ (1)	$\vec{E}\sin\omega t$ (2)	$\vec{E}(t)$ (3)	$\vec{E}\sin\omega t$ (4)
電界と磁界が時間的に変化しない	電界と磁界（電磁界）は正弦的に時間変化するが、放射は無視できる	電磁界が任意に時間変化し、放射はあっても限定的でそれほど問題にならない	電磁界が正弦的に時間変化し、エネルギーは放射を通して伝達される

全てを網羅する(4)式を使うことは理想だが，特定の制約条件が適用できる場合は簡略化した方が解析的（数学的）に扱いやすい

https://www.kesco.co.jp/comsol/training-sp/index.html#20151204keynote

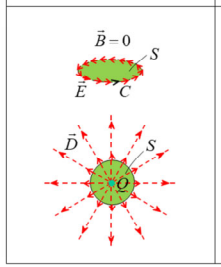
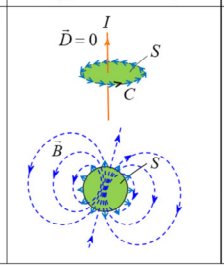
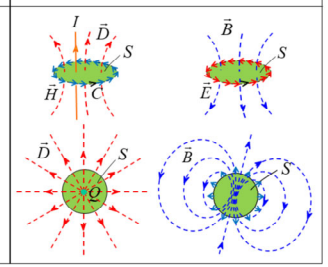
COMSOL

電磁気、電気回路、電磁波は密接に関係しています。これらの違いを時間変化というキーワードで分類すると4つの式に分けることができます。

静電界は時間変化がない場合です。低周波の電気回路は正弦波で時間変化するものの、放射という概念がありません。低周波の電気信号を空間に放射させるにはとてつもなく大きなアンテナが必要になるためです。過渡現象は電気信号が過渡的に時間変化するものの、瞬時的で放射はそれほど問題にしません。電磁波は電磁界が正弦的に時間変化し、エネルギーは放射を通して伝達されます。全てを網羅する式(4)を使うことが理想ですが、特定の制約条件が適用できる場合は簡略化した方が解析的（数学的）に扱いやすいものです。

電場・磁場・電磁場・ベクトル場とは？

6

電場（または電界）	磁場（または磁界）	電磁場（または電磁界）
		
● 静電場のルール	● 静磁場のルール	● 電磁場のルール
● 静電荷	● 磁石（ループ電流）	● 変動電荷（交流電流）
● 時間変化なし	● 時間変化なし	● 時間変化あり
● 保存場の性質	● アンペアの法則	● マクスウェル方程式
● ガウスの法則	● 磁場ガウスの法則	

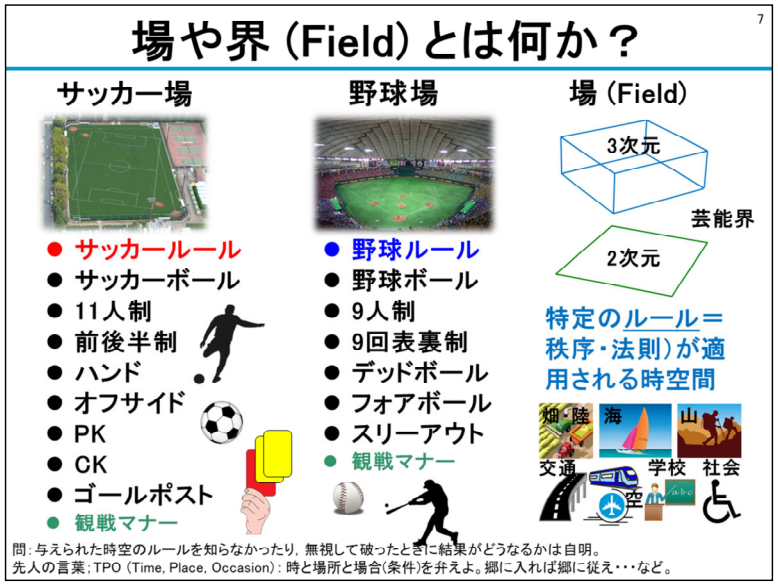
静電場、静磁場、電磁場の3種類のベクトル量をスライドに示します。

静電場では、静電荷（運動しない静止した電荷）を出発点として、電荷量に時間変動がないことを前提とすると、保存場の性質（する仕事とされる仕事は等しい）、ガウスの法則（クーロンの法則を一般化したもの）が法則・ルールとして必ず成り立ちます。

ある種のルールが適用される時空間を「場」と呼ぶことから、これを電場または電界と呼びます。電界は大きさと方向を有するベクトル場です。

同様に静磁場では、ループ電流（または磁石）を出発点として、電流（または磁石）の強さに時間変動がないことを前提とすると、アンペアの法則（ビオ−サバールの法則を一般化したもの）、磁気ガウスの法則（磁力線は常に閉じた閉ループを作る）が法則・ルールとして必ず成り立ちます。これを磁場または磁界と呼びます。磁界も大きさと方向を有するベクトル場です。

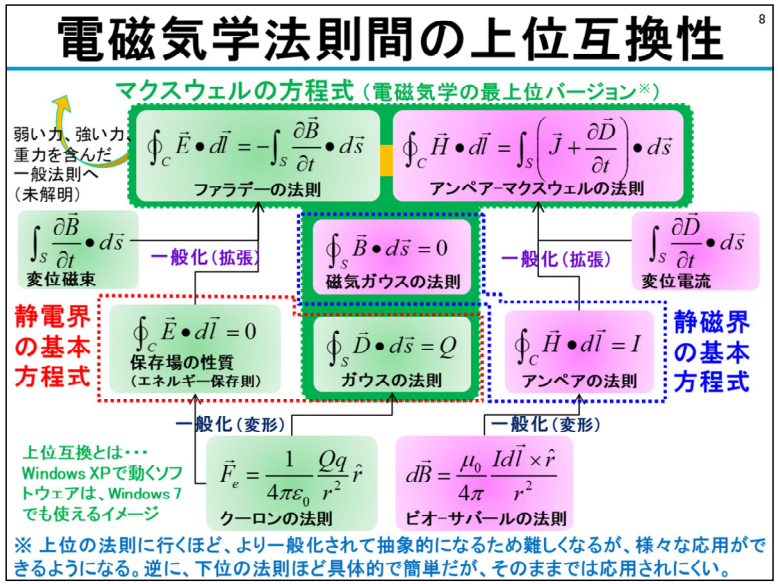
電磁場は、変動電荷（運動する電荷）を出発点として、電荷の大きさに時間変動があること（交流）を考慮すると、マクスウェルの方程式が法則・ルールとして成立します。これを電界と磁界の両方が存在する場として電磁場と呼びます。電磁場も当然ベクトル場です。



ここで場と界（英語ではともにfield）について、身近な例をもとに説明します。

場や界（フィールド）というのは、特定のルール＝秩序・法則が適用される時空のことを指します。

サッカー場や野球場では適用されるルールが違うように、我々の生活圏内である道路（陸）、空、海、山、学校、職場、家庭、社会にそれぞれのルールがあります。大切なのは、各場（所）に適用されるルールを逸脱したり無視すると、それなりのペナルティを自動的に被るということです。電磁場を利用するということは電磁場のルールを知って遵守するということに他なりません。



電磁気学で習う法則の間に成立する上位互換性についてのイメージをスライドに示します。

静電界はクーロンの法則が出発点です。これを一般化したのが保存場の性質とガウスの法則です。保存場の性質は時間変動する磁場（変位磁束）を考慮して一般化するとファラデーの法則になります。一方、静磁界はビオ-サバールの法則が出発点です。これを一般化したのがアンペアの法則と磁気ガウスの法則です。アンペアの法則は時間変動する電場（変位電流）を考慮して一般化するとアンペア-マクスウェルの法則になります。つまり、上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなりますが、様々な応用ができるようになるという利点があります。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単ですが、そのままでは応用されにくいという欠点があります。

4つの力の上位互換性

9

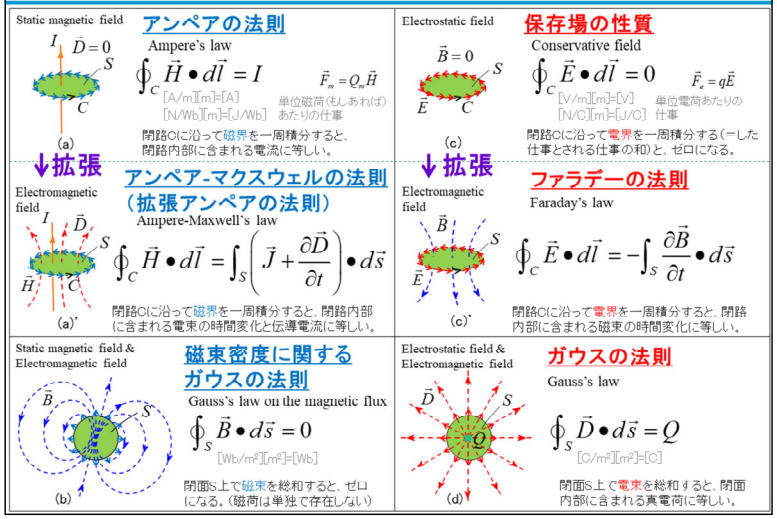
※ 上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなるが、様々な応用ができるようになる。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単だが、そのままでは応用されにくい。

久保田、五日市 ``磁力の科学'' p.109, B&Tブックス 日刊工業新聞社

電磁気学の最上位法則はマクスウェルの方程式です。しかし、マクスウェルの方程式には重力項がありません。また、原子レベルで働く力や量子力も考慮できません。これらを統一的に解釈しようとする試みが現在でも理論物理学者によって続けられています。

電磁界方程式（積分形：integral form）

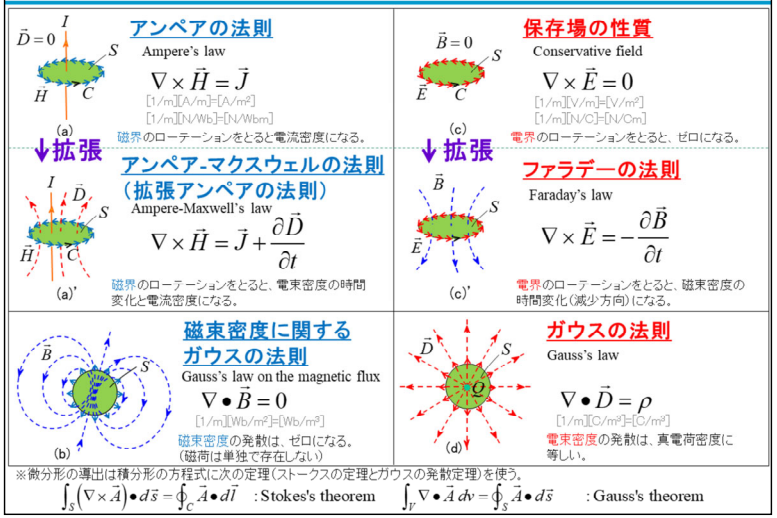
10



電磁界の支配方程式いわゆるマクスウェルの方程式の積分形についてまとめます。静磁界の支配方程式であるアンペアの法則と静電界の支配方程式である保存場の性質は、時間変動がある場合にはアンペア-マクスウェルの法則とファラデーの法則に拡張されます。これに、静磁界および静電界のガウスの法則を追加したものがマクスウェルの方程式です。積分形はイメージしやすいので、数式と図をセットで覚えることがポイントです。

電磁界方程式（微分形：differential form）

11



マクスウェルの方程式の微分形についてまとめます。微分形の導出は積分形の方程式にストークスの定理とガウスの発散定理を使うことで導出できます。微分形はベクトル微分演算子∇が出てくるため、積分形と違ってイメージし難い欠点があります。しかし、我々が通常の微積分の計算をする際に、積分よりも微分の方が簡単かつ機械的に計算できるように、微分形のマクスウェルの方程式は積分形よりも扱いやすいという利点があります。

積分形から微分形の導出（方法1）

12

アンペア-マクスウェルの法則より

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \bullet d\vec{s}$$

左辺にストークスの定理を適用

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \bullet d\vec{s} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \bullet d\vec{s}$$

積分記号内を比較して

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ファラデーの法則も上記と同様にして

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q$$

左辺にガウスの定理を適用して

$$\int_V \nabla \bullet \vec{D}\, dv = Q$$

右辺を電荷密度 ρ [C/m³] で表現すると

$$\int_V \nabla \bullet \vec{D}\, dv = \int_V \rho\, dv$$

積分記号内を比較して

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

磁気ガウスの法則も上記と同様にして

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0$$

問：なぜ積分形そのままではなく微分形を使うか？

ここで積分形のマクスウェルの方程式から微分形のマクスウェルの方程式の導出方法を示します。

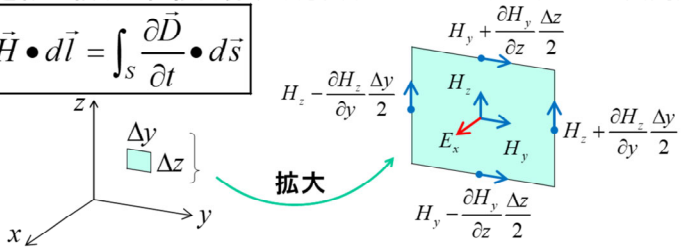
微分形が好まれる理由は、積分よりも微分の方が計算が楽だからです。

積分形から微分形の導出（方法2）

13

積分を微小領域で直接計算する方法（アンペア-マクスウェルの法則）

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s}$$



左辺

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z - \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y - \left(H_z - \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\Delta y \Delta z \quad \Rightarrow \quad \underline{\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)} \equiv (\nabla \times \vec{H})_x$$

単位面積当たりの循環の極限値

右辺

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s} = \int_S \frac{\partial D_x}{\partial t} ds = \frac{\partial D_x}{\partial t}\Delta y \Delta z$$

左辺=右辺より

$$\boxed{(\nabla \times \vec{H})_x = \frac{\partial D_x}{\partial t}}$$

積分形のマクスウェルの方程式（アンペア−マクスウェルの法則）から微分形を導出する別の方法について示します。

この方法はストークスの定理を使わずに、微小領域で線積分と面積分を直接計算する方法です。

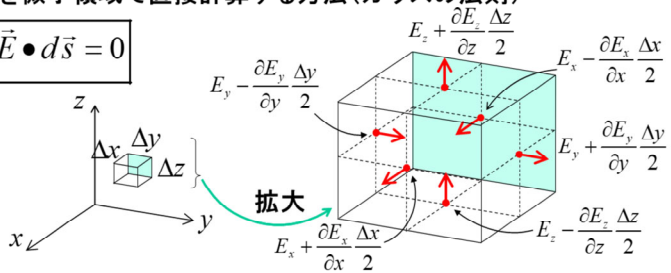
ただし、ベクトル解析で学習する回転の定義だけは予め知っておく必要があります。

積分形から微分形の導出（方法2）

14

積分を微小領域で直接計算する方法（ガウスの法則）

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$



左辺

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \left[\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right) - \left(E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta y \Delta z + \left[\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) - \left(E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta z \Delta x$$

$$+ \left[\left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right) - \left(E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\right]\Delta x \Delta y = \underline{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \equiv \nabla \bullet \vec{E}$$

単位体積当たりの流束の極限値

左辺=右辺より

$$\boxed{\nabla \bullet \vec{E} = 0}$$

同様に、積分形の方程式（保存場の性質）から微分形を導出する別の方法について示します。

この方法はガウスの発散定理を使わずに、微小領域で面積分を直接計算する方法です。

ただし、ベクトル解析で学習する発散の定義だけは予め知っておく必要があります。

マクスウェルの方程式

15

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \bullet d\vec{s} \\ \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \\ \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \\ \oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

⟷ どちらでも同じ意味

微分形

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}$$

例）

$$\boxed{\int dy = \int x dx} \leftrightarrow dy = x dx \leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = x}$$

未知関数 y を求める方程式に違いはない

積分形と微分形のマクスウェルの方程式を並べて示します。

閉じた積分記号、内積と外積、線積分と面積分、ベクトル微分演算子といった面倒な記号を抜きにして考えると、下の例に示すように積分形式でも微分形式でも未知関数 y を求める方程式に違いはないことが分かります。

簡単化したマクスウェルの方程式

16

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \\ \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \\ \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0 \\ \oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

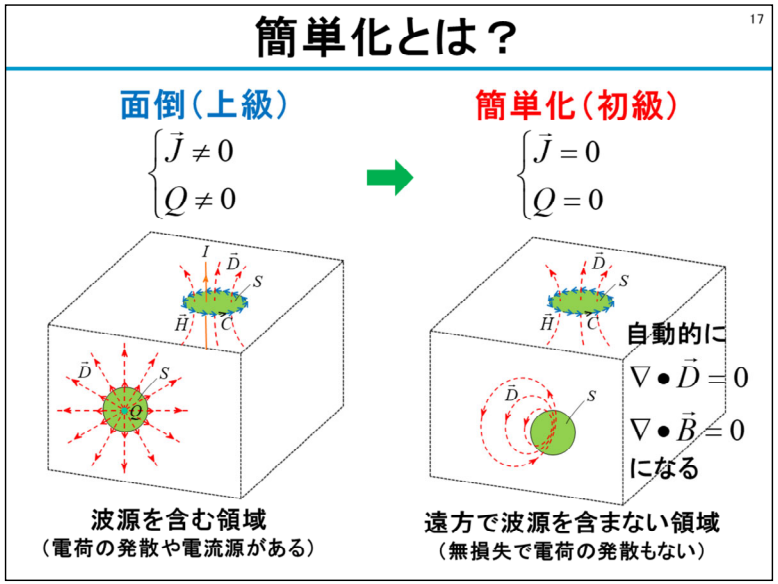
⟷ どちらでも同じ意味

微分形

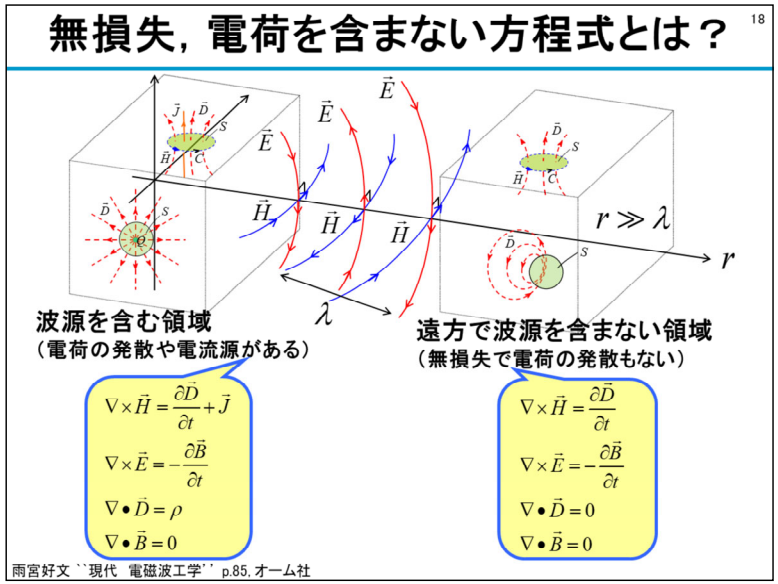
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{D} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}$$

簡単化のために，伝導電流と自由電荷を考えない条件を課してみる（J=0, Q=0）。ただし、微分形では微小領域、微小時間という制約が付く。

電磁気学の学習順序が静電界→静磁界→電磁界と順序を決めて積み上げ形式で学習するように、初学者は最初から無理をせず、簡単な場合から始めるのが妥当です。マクスウェルの方程式も同様にして簡単化のために，伝導電流と自由電荷を考えない条件を課してみます。即ち、マクスウェルの方程式における電流項と電荷をJ=0, Q=0とします。



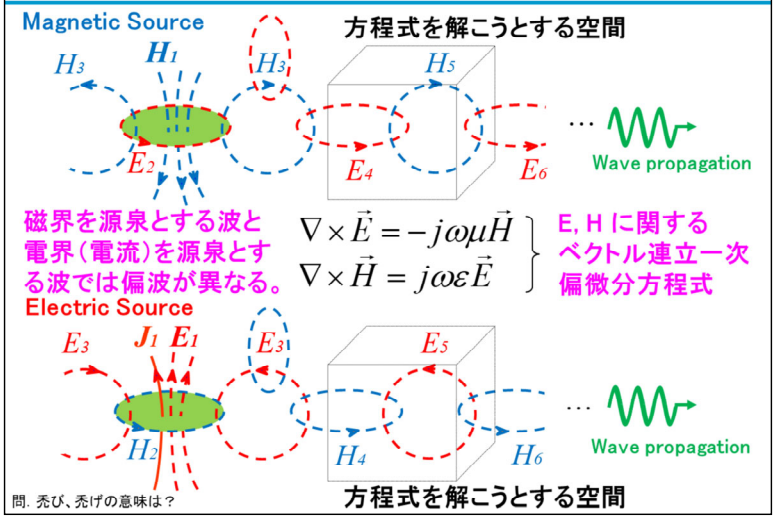
簡単かするとどのようなメリットがあるかを説明します。左側は電流源や電荷の発散が対象領域（積分形で言えば積分記号のSやCの内側のこと）の中に含まれています。一方、右側は電流と電荷をゼロにしたことで、対象領域の中には電流と電荷が存在しません。対象領域の外に電流や電荷が存在しても大丈夫です。このとき、波源を含まず、電荷の発散がなく、損失がない（電流が流れない）という条件が自動的に成立します。



波源を含まず、電荷の発散がなく、損失がない（電流が流れない）という条件は、スライドのように波源から離れた無損失の領域と考えることができます。波源から離れた無損失の領域とは、例えば、電流が流れるアンテナ導体部分を除いた空中や真空中が考えられます。

マクスウェルの方程式のイメージ

19



問. 禿び、禿げの意味は？

真空中のマクスウェルの方程式のイメージをスライドに示します。簡単化したマクスウェルの方程式を解く＝解を求めるとは、上の図ではE4やH5を求めること、下の図ではH4やE5を求めることに相当します。波源とはエネルギーが無限に供給される場所ですが、初学者が扱うにはそれなりに面倒で難解なものでもあります。学習が進んで中級や上級に進むにつれて、やがて波源を含んだマクスウェルの方程式を解く必要が出てきます。

「マクスウェルの方程式」を英語で

20

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}$$

The rotation of H equals the partial of D with respect to t plus J, the rotation of E equals minus the partial of B with respect to t, the divergence of D equals rho, the divergence of B equals zero.

保江 “数学版これを英語で言えますか？” p.258, BLUE BACKS

微分形のマクスウェルの方程式を英語で読むとスライドのようになります。