波動方程式

v1.4 May.2014

＿＿＿科＿＿年＿＿番　氏名:＿＿＿＿＿＿

1. 磁界波動方程式

マクスウェルの方程式を変形して，電界および磁界がそれぞれ波動であることを示す。まず，微分形のマクスウェルの方程式[*1]

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{4}$$

において，式 (1) の両辺の回転をとって $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ の関係式[*2]を使うと

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \tag{5}$$

式 (5) 左辺に次のベクトル公式

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \bullet \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{6}$$

を適用し，式 (5) 右辺に式 (2) を適用すると

$$\nabla \left(\nabla \bullet \vec{H}\right) - \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \tag{7}$$

が得られる。さらに式 (4) と $\vec{B} = \mu \vec{H}$ の関係式を使うと

$$-\nabla^2 \vec{H} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} \tag{8}$$

となる。$\partial/\partial t = j\omega$ の関係[*3]を使って整理すると

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{H} = 0 \tag{9}$$

さらに，波数 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ と置くと

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \tag{10}$$

式 (10) を直角座標 (x, y, z) で表すと

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} + k^2 \vec{H} = 0 \tag{11}$$

さらに成分表示すると次式になる。

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} + k^2 H_i = 0 \qquad (i = x, y, z) \tag{12}$$

となる。式 (10)(11) および (12) の形[*4]を**磁界波動方程式**または**ヘルムホルツ方程式**と呼ぶ。一方，静磁界の場合 $(\omega = 0)$ には式 (10)(11) および (12) は

$$\nabla^2 \vec{H} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} = 0 \qquad (i = x, y, z) \tag{15}$$

となる。式 (13)(14) および (15) の形を**ラプラス方程式**と呼ぶ。

2. 電界波動方程式

同様にして，式 (2) の両辺の回転をとって $\vec{B} = \mu \vec{H}$ を使うと

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \tag{16}$$

式 (16) 左辺に式 (6) のベクトル公式を適用し，式 (16) 右辺に式 (1) を適用すると

$$\nabla \left(\nabla \bullet \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \tag{17}$$

が得られる。さらに式 (3) と $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ の関係式を使うと

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \tag{18}$$

となる。$\partial/\partial t = j\omega$ の関係を使って整理すると

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0 \tag{19}$$

さらに，波数 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ と置くと

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \tag{20}$$

式 (20) を直角座標 (x, y, z) で表すと

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0 \tag{21}$$

さらに成分表示すると次式になる。

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k^2 E_i = 0 \qquad (i = x, y, z) \tag{22}$$

式 (20)(21) および (22) の形を**電界波動方程式**または**ヘルムホルツ方程式**と呼ぶ。一方，静電界の場合 $(\omega = 0)$ には式 (20)(21)(22) は

$$\nabla^2 \vec{E} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = 0 \qquad (i = x, y, z) \tag{25}$$

となる。式 (23)(24)(25) の形を**ラプラス方程式**と呼ぶ。以上まとめると，マクスウェルの方程式からヘルムホルツ方程式（波動方程式）またはラプラス方程式が導出できることが分かる。

3. 波動方程式の一般解

最も簡単な例として，z 方向に伝搬する平面波 E_x を考える。平面波なので x 方向と y 方向には無限に一様な広がりを有しているので，$\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ が成立する。このとき式 (22) は

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{26}$$

この一般解は

$$E_x = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{+jkz} \tag{27}$$

となる[*5]。式 (27) 右辺第 1 項は $z+$ に進むので前進波と呼び，第 2 項は $z-$ に進むので後退波と呼ぶ。一方，磁界は式 (2) より

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \tag{28}$$

であるから

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times E_x \hat{x} = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} \tag{29}$$

となる。これに式 (27) を代入すると，$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ として[*6]

$$H_y = \frac{E^+}{\eta} e^{-jkz} - \frac{E^-}{\eta} e^{+jkz} = H^+ e^{-jkz} + H^- e^{+jkz} \tag{30}$$

以上まとめると

$$E_x = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{+jkz} \tag{31}$$

$$H_y = \frac{E^+}{\eta} e^{-jkz} - \frac{E^-}{\eta} e^{+jkz} \tag{32}$$

となる。式 (31) のように電界は前進波と後退波は単純な和記号 $+$ となるが，式 (32) のように磁界は後退波の符号が $-$ になることに注意が必要である。これは磁界を求めるために式 (29) において電界を表す式 (27) の z 微分をとっているためである。いま、式 (27) において正の伝搬成分だけを時間領域に拡張して考えると

$$E_x{}^+ = E^+ e^{-jkz} e^{j\omega t} = E^+ e^{j(\omega t - kz)} \tag{33}$$

物理的に意味を有するのは実部のみなので

$$e_x(z, t) = |E^+| \cos(\omega t - kz + \phi^+) \tag{34}$$

となる[*7]。同様にして磁界の正の伝搬成分は、式 (32) 右辺第 1 項に $e^{j\omega t}$ を掛けて全体の実部をとることにより

$$h_y(z, t) = \frac{|E^+|}{\eta} \cos(\omega t - kz + \phi^+) \tag{35}$$

となる。さて式 (34) と式 (35) の cos を次のように変形してみる。

$$\cos(\omega t - kz + \phi^+) = \cos\left[-k\left(z - \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t\right) + \phi^+\right] \tag{36}$$

式 (36) 右辺の ( ) 内は $z - vt$ の形をしており，時刻経過とともに速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \tag{37}$$

で $z+$ の方向へ平行移動する関数[*8]になっていることが分かる。このように一定速度 v で，その形を保ったまま伝わる連続媒質の擾乱のことを**波動**と呼ぶ。式 (37) より，誘電体および磁性体中では電磁波の速度 v は光速 c よりも $1/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ だけ遅くなることが分かる。また，式 (38) より，媒質中の波長 λ は自由空間中の波長 λ_0 よりも $1/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ だけ短くなることが分かる。これを**波長短縮**と呼ぶ。

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \tag{38}$$

[*1] ここでは簡単のために伝導電流 $\vec{J} = 0$，真電荷密度 $\rho = 0$ とする。

[*2] これを**構成方程式**と呼ぶ。他に $\vec{B} = \mu\vec{H}$ と $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ がある。

[*3] 時間依存項を $e^{j\omega t}$ とすれば，微分演算子 $\partial/\partial t$ は常に $j\omega$ となる。

[*4] ある関数の 2 階微分がもとの関数の定数倍になっている形。

[*5] 距離 z [m] を**物理長** (physical length) と呼ぶのに対して，位相 kz [rad] を**電気長** (electrical length) と呼ぶこともある。

[*6] η (イータ) は E と H の比で**波動インピーダンス**と呼び Z_w とも書く。線路上の電圧 V と電流 I の比である**特性インピーダンス** Z_0 とは異なる。

[*7] E^+, E^- は複素振幅で $E^+ = |E^+|e^{j\phi^+}$, $E^- = |E^-|e^{j\phi^-}$ とする。

[*8] $t = 1$ 秒後には v だけ $z+$ へ，$t = 2$ 秒後には $2v$ だけへ $z+$ へシフトする。