波動方程式 (演習問題)

v3.2 Dec.2020　　凡例: ♣◇ 教科書 ♡ 演習書 ♠ 他文献　　番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. ♣ $\varepsilon_r = 4.0$ の誘電体中（暗黙の了解として $\mu_r = 1$）を伝搬する電磁波の速度 v，固有インピーダンス η および屈折率 n を求めよ。[*1](教科書，例題 10.5)

2. ♣ 比誘電率 ε_r=4.0，比透磁率 μ_r=1 の媒質に 1.5 GHz の電磁波が入射したとき，次の問いに答えよ。[*2] (教科書，例題 10.5)

（1）屈折率 n，速度 v，波長 λ，波動インピーダンス Z_w を求めよ。
（2）波数 k または位相定数 β を求めよ。
（3）媒質の物理長が 3 m のとき電気長を求めよ。
（4）媒質の電気長が 300 rad のとき物理長を求めよ。
（5）真空中の波長 λ_0 と速度 c，波動インピーダンス Z_w と比較せよ。

3. ♣ 次の関数が波動方程式の解になっていることを計算で確かめよ。ただし，一次元波動方程式は次式である。[*3] (教科書，例題 10.4)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

（1）$y = f(x \pm vt), \quad y = f(t \pm x/v)$
（2）$y = \cos(\omega t - kx), \quad y = \sin(\omega t - kx)$
（3）$y = e^{j(\omega t - kx)}$

4. 鏡と自分の距離を L=30 cm とするとき，鏡に映った姿は何秒前の姿か。ただし，眼球から脳神経までの信号伝達時間は無視する。[*4]

5. 真空中における次の各量を計算せよ。[*5]

（1）電磁波の速度 c [m/s] を求めよ。
（2）波動インピーダンス Z_w [Ω] の値を求めよ。
（3）1 MHz, 100 MHz, 1 GHz, 10 GHz の波長 λ_0 [m] を求めよ。
（4）1 MHz, 100 MHz, 1 GHz, 10 GHz の波数 k [rad/m] を求めよ。

6. 長さ 1 m の同軸線路がある。(1) 内部が空気 ε_r=1 のとき，(2) テフロン ε_r=2.1 のとき，1 MHz, 100 MHz, 1 GHz, 10 GHz における電気長 θ [rad] を求めよ。[*6]

7. 電界 E_x, E_y が次式で与えられているとき，z 方向に伝搬する平面波の組み合わせ (E, H) を 4 つ求めよ。[*7]

$$E_x = \varphi(z - vt) + \psi(z + vt),$$
$$E_y = f(z - vt) + g(z + vt)$$

8. ♠ 微分形のマクスウェル方程式において，伝導電流 $\vec{J} = 0$，真電荷密度 $\rho = 0$ としたときのベクトル電界波動方程式およびベクトル磁界波動方程式を導出せよ。[*8]

★ 公式集

波動方程式

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} = 0 \tag{1}$$

デカルト座標系 (x, y, z) におけるベクトル電界波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2\right)\vec{E} = 0 \tag{2}$$

スカラー波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \gamma^2 E_i = 0 \qquad (i = x, y, z) \tag{3}$$

1 次元スカラー波動方程式の一般解

$$E(z) = E_0^+ e^{-\gamma z} + E_0^- e^{+\gamma z} \tag{4}$$

$$H(z) = \frac{1}{\eta}(E_0^+ e^{-\gamma z} - E_0^- e^{+\gamma z}) \tag{5}$$

波動インピーダンス

$$Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\eta_0, \quad \text{for lossless material} \tag{6}$$

平面波の波長と位相速度

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{7}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \tag{8}$$

物理長と電気長

$$\theta = kz, \qquad \text{Electrical length [rad]} \tag{9}$$

$$z = \frac{\theta}{k}, \qquad \text{Physical length [m]} \tag{10}$$

[*1] **答え**：$v = 1.5 \times 10^8$ m/s, $\eta = 188.5\ \Omega$, $n = 2$

[*2] **答え**：(1) $n = 2.0$, $v = 1.5 \times 10^8$ m/s, $\lambda = 10$ cm, $Z_w = 188.4\ \Omega$, (2) $k = 62.83$ rad, (3) $\theta = 188.5$ rad, (4) $l = 4.77$ m, (5) $\lambda_0 = 20$ cm, $c = 3 \times 10^8$ m/s, $Z_w = 376.7\ \Omega$, 誘電体中では真空中に比べて $1/\sqrt{\varepsilon_r}$ 倍になる。

[*3] **答え**：（左辺）$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x - vt)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x - vt)$,（右辺）$\frac{\partial y}{\partial t} = -vf'(x - vt)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt)$ 従って波動方程式を満たす。他は略。

[*4] **答え**：2×10^{-9} s = 2 ns　過去の自分しか観察できない。

[*5] **答え**：(1) 2.998×10^8 m/s, (2) 376.73 Ω, (3) 300 m, 3m, 30 cm, 3 cm, (4) 0.021 rad/m, 2.09 rad/m, 20.94 rad/m, 209.44 rad/m

[*6] **答え**:問題の条件設定に ε_r しか記載されていないとき(誘電体の場合), 暗黙の了解として比透磁率は $\mu_r = 1$ であることを意味する。(1) 0.02 rad (1.2°), 2.09 rad (120°), 20.94 rad (1200°), 209.44 rad (12000°), (2) 0.03 rad (1.7°), 3.04 rad (174°), 30.35 rad (1739°), 303.51 rad (17390°),

[*7] **答え**：$E_x = \varphi(z - vt)$, $H_y = \frac{1}{\eta}\varphi(z - vt)$ のセットは $+z$ へ伝搬,
$E_x = \psi(z + vt)$, $H_y = -\frac{1}{\eta}\psi(z + vt)$ のセットは $-z$ へ伝搬,
$E_y = f(z - vt)$, $H_x = -\frac{1}{\eta}f(z - vt)$ のセットは $+z$ へ伝搬,
$E_y = g(z + vt)$, $H_x = \frac{1}{\eta}g(z + vt)$ のセットは $-z$ へ伝搬
ただし，$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

[*8] **答え**：$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$, $\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$, または, $\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$, $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$, ただし，$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$