

1. ポインティングの定理

電磁波による伝送電力についてまとめる。次のベクトル公式

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \quad (1)$$

において、右辺の () 内は次式に示すファラデーの法則とアンペール-マクスウェルの法則より

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

であるから、式 (1) 右辺第 1 項は

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (3)$$

同様に、式 (1) 右辺第 2 項は

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

となる。式 (3) と式 (4) の差をとることにより、式 (1) の右辺は

$$\vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (5)$$

に変形できる。式 (5) を展開すると

$$-\mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

となるが、式 (6) は任意ベクトル \vec{A} とその時間微分 $\partial \vec{A} / \partial t$ との内積の関係式^{*1}

$$\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} A^2 \quad (7)$$

を使うと

$$-\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E^2 - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (8)$$

のように変形できる。以上まとめると式 (1) のベクトル公式は

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (9)$$

のように変形できる。これをポインティングの定理^{*2}と呼ぶ。

2. ポインティングの定理の物理的意味

ここで式 (9) をさらに変形してその物理的な意味を考察する。

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) + \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (10)$$

ここで図 1 のような任意の領域 V で式 (10) を両辺積分すると

$$\begin{aligned} & -\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dv + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv \end{aligned} \quad (11)$$

ここで左辺にガウスの発散定理

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

を使うと

$$\begin{aligned} & -\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dv + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv \end{aligned} \quad (13)$$

さらに、式 (13) 左辺の () 内を $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ とおき、式 (13) 右辺第 1 項目の () 内を $w_e = \epsilon_0 E^2 / 2$ [J/m³]、 $w_m = \mu_0 H^2 / 2$ [J/m³] とおいて、第 2 項に $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ の関係を使えば^{*3}

$$\oint_S \vec{S} \cdot (-\hat{n}) ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dv + \int_V \sigma E^2 dv \quad (14)$$

と書くこともできる。左辺第 1 項は体積 V を囲む閉面 S に流入する電力^{*4}を示しこれをポインティング電力またはポインティングベクトルと呼ぶ。一方、右辺第 1 項は電気エネルギー W_e [J] と磁気エネルギー W_m [J] の時間変化率 (単位時間あたりの増分) を示し、右辺第 2 項はジュール損失を示す。即ち、式 (14) は「体積 V を有する閉面 S に流入する電力 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ は、体積 V 内の電気エネルギー W_e および磁気エネルギー W_m の単位時間あたりの増分と、ジュール損失

$\vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma E^2$ の和に等しい」ことを意味しており、流入電力=蓄積電力+損失というエネルギー保存則が成り立っていることが分かる。

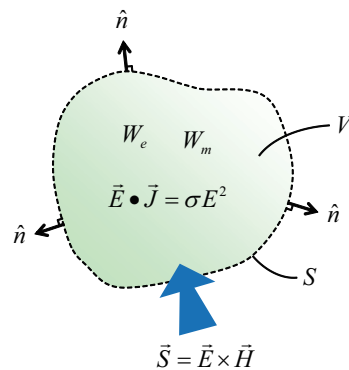


図 1 体積 V の閉面 S (面に垂直な外向きの単位ベクトルを \hat{n} とする) に流入する電力 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ は、体積 V 内の電気エネルギー W_e および磁気エネルギー W_m の時間変化率 (単位時間あたりの増分) と、ジュール損失 $\vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma E^2$ の和に等しい。

3. 付録：式 (7) の導出

以下は式 (7) の導出である。不要なら読み飛ばしてもよい。

$$\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})$$

$$= A_x \frac{\partial}{\partial t} A_x + A_y \frac{\partial}{\partial t} A_y + A_z \frac{\partial}{\partial t} A_z$$

ここで

$$\frac{\partial A_x^2}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial t} \frac{\partial A_x}{\partial t} = 2A_x \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

であるから

$$A_x \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_x^2}{\partial t}$$

となる。 A_y, A_z についても同様の関係が得られるので

$$\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_x^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_z^2}{\partial t}$$

より

$$\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{A}|^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} A^2$$

が得られる。(導出終わり)

4. 付録：式 (14) の単位系について

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \text{ の単位は } E \text{ [V/m], } H \text{ [A/m] より}$$

$$\rightarrow [\text{VA/m}^2]$$

$$\rightarrow [\text{W/m}^2]$$

$$W_e = \epsilon_0 E^2 / 2 \text{ の単位は } \epsilon_0 \text{ [F/m], } E^2 \text{ [V}^2/\text{m}^2] \text{ より}$$

$$\rightarrow [\text{C/V} \cdot \text{m}] [\text{V}^2/\text{m}^2] \quad *5$$

$$\rightarrow [\text{CV/m}^3]$$

$$\rightarrow [\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V/m}^3]$$

$$\rightarrow [\text{W} \cdot \text{s/m}^3]$$

$$W_m = \mu_0 H^2 / 2 \text{ の単位は } \mu_0 \text{ [H/m], } H^2 \text{ [A}^2/\text{m}^2] \text{ より}$$

$$\rightarrow [\text{V}] [\text{A/s}]^{-1} [\text{A}^2/\text{m}^2] \quad *6$$

$$\rightarrow [\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A/m}^3]$$

$$\rightarrow [\text{W} \cdot \text{s/m}^3]$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma E^2 \text{ の単位は } E \text{ [V/m], } J \text{ [A/m}^2] \text{ より}$$

$$\rightarrow [\text{VA/m}^3]$$

$$\rightarrow [\text{W/m}^3]$$

*1 この関係式の導出は付録：で。

*2 パーミンガム大教授 Poynting, John Henry (1852-1914) が 1884 年に発表した定理。マクスウェルの方程式の発表 (1864) から 20 年後のこと。

*3 $\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot \sigma \vec{E} = \sigma |\vec{E}|^2 = \sigma E^2$

*4 \hat{n} は閉面 S に対して外向きに垂直な単位ベクトルとして定義しているため、 $-\hat{n}$ は流入を意味する。

*5 $Q = CV$ より、 C の次元 [F] は [C/V] に等しい。

*6 $V = L di/dt$ より、 L の次元 [H] は [V][A/s]⁻¹ に等しい。