ポインティングの定理

v1.6 Jan.2020　　　　番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. ポインティングの定理

電磁波による伝送電力についてまとめる。次のベクトル公式

$$\nabla \bullet (\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H}) \tag{1}$$

において，右辺の () 内は次式に示すファラデーの法則とアンペア-マクスウェルの法則より

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{2}$$

であるから，式 (1) 右辺第 1 項は

$$\vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{E}) = \vec{H}\bullet\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \tag{3}$$

同様にして，式 (1) 右辺第 2 項は

$$\vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H}) = \vec{E}\bullet\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

となる。式 (3) と式 (4) の差をとることにより，式 (1) の右辺は

$$\vec{H}\bullet\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\bullet\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \tag{5}$$

に変形できる。式 (5) を展開すると

$$-\mu_0\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \vec{E}\bullet\vec{J} - \varepsilon_0\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{6}$$

となるが，式 (6) は任意ベクトル $\vec{A}$ とその時間微分 $\partial\vec{A}/\partial t$ との内積の関係式[*1]

$$\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}A^2 \tag{7}$$

を使うと

$$-\frac{1}{2}\mu_0\frac{\partial}{\partial t}H^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E^2 - \vec{E}\bullet\vec{J} \tag{8}$$

のように変形できる。以上まとめると式 (1) のベクトル公式は

$$\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right) - \vec{E}\bullet\vec{J} \tag{9}$$

のように変形できる。これを**ポインティングの定理**[*2]と呼ぶ。

2. ポインティングの定理の物理的意味

ここで式 (9) をさらに変形してその物理的な意味を考察する。

$$-\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right) + \vec{E}\bullet\vec{J} \tag{10}$$

ここで図 1 のような任意の領域 V で式 (10) を両辺積分すると

$$-\int_V \nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})\,dv = \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)dv + \int_V\vec{E}\bullet\vec{J}\,dv \tag{11}$$

ここで左辺にガウスの発散定理

$$\int_V\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})\,dv = \oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{s} \tag{12}$$

を使うと

$$-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)dv + \int_V\vec{E}\bullet\vec{J}\,dv \tag{13}$$

さらに，式 (13) 左辺の () 内を $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ とおき，式 (13) 右辺第 1 項目の () 内を $w_e=\varepsilon_0E^2/2$ [J/m^3], $w_m=\mu_0H^2/2$ [J/m^3] とおいて，第 2 項に $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ の関係を使えば[*3]

$$\oint_S\vec{S}\bullet(-\hat{n})ds = \frac{\partial}{\partial t}\int_V(w_e+w_m)\,dv + \int_V\sigma E^2\,dv \tag{14}$$

と書くこともできる。左辺第 1 項は体積 V を囲む閉面 S に流入する電力[*4]を示しこれを**ポインティング電力**または**ポインティングベクトル**と呼ぶ。一方，右辺第 1 項は電気エネルギー W_e [J] と磁気エネルギー W_m [J] の時間変化率（単位時間あたりの増分）を示し，右辺第 2 項はジュール損失を示す。即ち，式 (14) は「体積 V を有する閉面 S に流入する電力 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ は，体積 V 内の電気エネルギー W_e および磁気エネルギー W_m の単位時間あたりの増分と，ジュール損失 $\vec{E}\bullet\vec{J}=\sigma E^2$ の和に等しい」ことを意味しており，流入電力=蓄積電力＋損失というエネルギー保存則が成り立っていることが分かる。

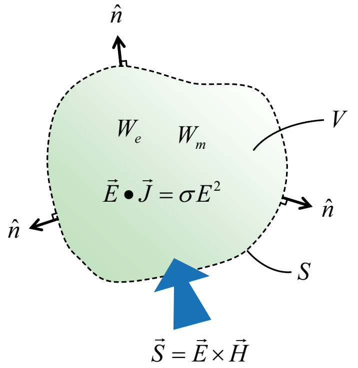

図 1　体積 V の閉面 S(面に垂直な外向きの単位ベクトルを $\hat{n}$ とする) に流入する電力 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ は，体積 V 内の電気エネルギー W_e および磁気エネルギー W_m の時間変化率（単位時間あたりの増分）と，ジュール損失 $\vec{E}\bullet\vec{J}=\sigma E^2$ の和に等しい。

3. 付録： 式 (7) の導出

以下は式 (7) の導出である。不要なら読み飛ばしてもよい。

$$\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = (A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\bullet\frac{\partial}{\partial t}(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})$$

$$= A_x\frac{\partial}{\partial t}A_x + A_y\frac{\partial}{\partial t}A_y + A_z\frac{\partial}{\partial t}A_z$$

ここで

$$\frac{\partial A_x^2}{\partial t} = \frac{\partial A_x^2}{\partial A_x}\frac{\partial A_x}{\partial t} = 2A_x\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

であるから

$$A_x\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_x^2}{\partial t}$$

となる。A_y, A_z についても同様の関係が得られるので

$$\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_x^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_y^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_z^2}{\partial t}$$

より

$$\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(A_x^2+A_y^2+A_z^2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\bullet(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{A}|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}A^2$$

が得られる。(導出終わり)

4. 付録： 式 (14) の単位系について

$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ の単位は E [V/m], H [A/m] より
→[VA/m^2]
→[W/m^2]

$W_e=\varepsilon_0E^2/2$ の単位は ε_0 [F/m], E^2 [V^2/m^2] より
→[C/V·m][V^2/m^2]　[*5]
→[CV/m^3]
→[A·s·V/m^3]
→[W·s/m^3]

$W_m=\mu_0H^2/2$ の単位は μ_0 [H/m], H^2 [A^2/m^2] より
→[V][A/s]$^{-1}$[A^2/m^2]　[*6]
→[V·s·A/m^3]
→[W·s/m^3]

$\vec{E}\bullet\vec{J}=\sigma E^2$ の単位は E [V/m], J [A/m^2] より
→[VA/m^3]
→[W/m^3]

■

[*1] この関係式の導出は付録：で。

[*2] バーミンガム大教授 Poynting, John Henry (1852-1914) が 1884 年に発表した定理。マクスウェルの方程式の発表 (1864) から 20 年後のこと。

[*3] $\vec{E}\bullet\vec{J}=\vec{E}\bullet\sigma\vec{E}=\sigma|\vec{E}|^2=\sigma E^2$

[*4] $\hat{n}$ は閉面 S に対して外向きに垂直な単位ベクトルとして定義しているため，$-\hat{n}$ は流入を意味する。

[*5] $Q=CV$ より，C の次元 [F] は [C/V] に等しい。

[*6] $V=Ldi/dt$ より，L の次元 [H] は [V][A/s]$^{-1}$ に等しい。