ポインティングの定理 (演習問題)

v2.7 Jun.2023　　番号:____________________　氏名:____________________

1. ◇ 真空中で電界が $\vec{E} = \hat{x}f(z-ct) + \hat{y}\sqrt{3}f(z-ct)$ で与えられる平面波がある。磁界とポインティングベクトルをもとめよ。[*1]（安達，大貫，電気磁気学，p.153）

2. ◇ 平面電磁波は，そのエネルギーの半分を電界エネルギーの形で，残りの半分を磁界のエネルギーの形で等分して運ぶことを示せ．[*2]（安達，大貫，電気磁気学，p.154）

3. ポインティングベクトルの大きさが $S = 0.5$ mW/cm^2 のとき，これと等価な平面波の電界 E [V/m] と磁界 H [A/m] の大きさを求めよ。ただし，波動インピーダンスは $\eta_0 = 120\pi \simeq 377\ \Omega$ とする。[*3]

4. 電界振幅 $E = 1$ V/m の平面電磁波において，磁束密度 B [T] の振幅はいくらか。また，ポインティングベクトル $\vec{S}$ [W/m^2] の大きさはいくらか。[*4]（鹿子嶋，電磁波・光波工学，p.44）

5. 出力 1 W の He-Ne レーザ光源から半径 $r = 0.1$ mm の細いペンシルビームが出ているとき，電界 E [V/m] と磁界 H [A/m] および磁束密度 B [T] の大きさを求めよ。ただし，レーザビームの強度は断面内で一様であるものとする。[*5]（鹿子嶋，電磁波・光波工学，p.44）

6. 等方性アンテナから 500 W の電力が放射されている。放射電力密度が 100 W/m^2，50 W/m^2，10 W/m^2 になる距離 r [m] を求めよ。[*6]

7. ♠ ベクトル公式 $\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \bullet (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \bullet (\nabla \times H)$ と電流源を含む微分形のマクスウェルの方程式からポインティングの定理を導出し，その物理的な意味を説明せよ。[*7](鹿子嶋，電磁波・光波工学，p.44)

8. ♠ 同軸線に流入するポインティング電力 $P = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \bullet d\vec{s}$ [W] は，同軸線路の電圧と電流から求めた伝送電力 $P = VI$ [W] に等しいことを示せ。[*8](安達，石曽根，電磁波工学演習，p.5)

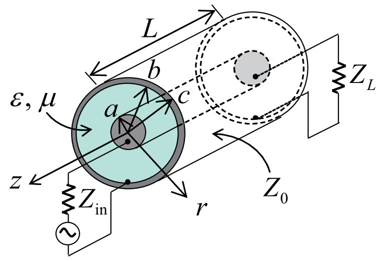

図１　同軸線路内部を伝わる電力

★ **公式集**

ポインティング電力

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{1}$$

ポインティングの定理（微分形）

$$\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) - \vec{E} \bullet \vec{J} \tag{2}$$

ポインティングの定理（積分形）

$$\oint_S \vec{E} \times \vec{H} \bullet (-\hat{n}) ds = \frac{\partial}{\partial t}\int_V (w_{\rm e} + w_{\rm m})\, dv + \int_V \sigma E^2\, dv \tag{3}$$

ただし，閉面 S 上の外向き法線ベクトルを $\hat{n}$ とする。

複素ポインティングの定理（微分形）

$$\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}^*) = j\omega(\varepsilon \vec{E} \bullet \vec{E}^* - \mu \vec{H} \bullet \vec{H}^*) - \sigma \vec{E} \bullet \vec{E}^* - \vec{E} \bullet \vec{J}_0^* \tag{4}$$

複素ポインティングの定理（積分形）

$$\begin{aligned} &\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \bullet d\vec{s} = j\omega \int_V \left(\varepsilon \vec{E} \bullet \vec{E}^* - \mu \vec{H} \bullet \vec{H}^*\right) dv \\ &- \int_V \sigma \vec{E} \bullet \vec{E}^*\, dv - \int_V \vec{E} \bullet \vec{J}_0^*\, dv \end{aligned} \tag{5}$$

時間平均実電力

$$\frac{1}{2}{\rm Re}\left[\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \bullet d\vec{s}\right] = -\frac{1}{2}\int_V \sigma \vec{E} \bullet \vec{E}^*\, dv - \frac{1}{2}\int_V \vec{E} \bullet \vec{J}_0^*\, dv \tag{6}$$

時間平均リアクティブ電力

$$\frac{1}{2}{\rm Im}\left[\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \bullet d\vec{s}\right] = 2\omega(W_{\rm e} - W_{\rm m}) \tag{7}$$

[*1] **答え**：$\vec{H} = \hat{y}\frac{1}{\eta}f(z-ct) - \hat{x}\frac{\sqrt{3}}{\eta}f(z-ct)$, $\vec{S} = \hat{z}\frac{4}{\eta}\{f(z-ct)\}^2$

[*2] **答え**：略

[*3] **答え**：43.4 V/m, 0.1152 A/m

[*4] **答え**：3.33×10^{-9} T, 2.65×10^{-3} W/m^2

[*5] **答え**：1.095×10^{5} V/m, 2.91×10^{2} A/m, 3.65×10^{-4} T

[*6] **答え**：63.1 cm, 89.2 cm, 1.995 m

[*7] **答え**：略

[*8] **答え**：略