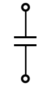
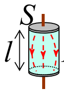
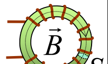
ポインティングベクトル

1^{st} 2011/04/22
L^{st} 2023/01/20

電磁気エネルギーのまとめ

	電気エネルギー	磁気エネルギー
回路素子 電極又は導線	$W_e=\int_0^V Cvdv=\frac{1}{2}CV^2$  C $=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ [J] (1) (1)=(1)' が成立することを確認せよ。※	$W_m=\int_0^I Lidi=\frac{1}{2}LI^2$  L $=\frac{1}{2}\varphi I=\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{L}$ [J] (2) (2)=(2)' が成立することを確認せよ。※
誘電体・磁性体 電極又は巻線 内部のコア材料	$u_e=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$  S, l, $\vec{D}$ $=\frac{1}{2}\frac{D}{\varepsilon}D=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$ $[\mathrm{J/m^3}]=[\mathrm{N/m^2}]$ $W_e=u_eSl$ (1)' $=[\mathrm{Pa}]$	$u_m=\frac{1}{2}HB=\frac{1}{2}\mu H^2$  $\vec{B}$, S, l $=\frac{1}{2}\frac{B}{\mu}B=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$ $[\mathrm{J/m^3}]=[\mathrm{N/m^2}]$ $W_m=u_mSl$ (2)' $=[\mathrm{Pa}]$

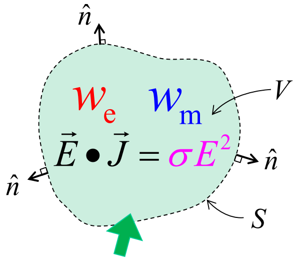
単位体積あたりのエネルギー [J/m³] は [J] = [N・m] の関係より、圧力（応力）[N/m²] = [Pa] に等しい。

※ヒント (1)=(1)' とおいて、平行平板のCもしくは、環状ソレノイドのLを求めてみる。

電磁エネルギー密度 $u=u_e+u_m$ $[\mathrm{J/m^3}]$

ポインティングの定理（積分形）

John Henry Poynting (1852-1914)
バーミンガム大教授 http://www.bbc.co.uk/



$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$
ポインティングベクトル

【電磁界版のエネルギー保存則】
閉面Sへの流入電力＝
面内に蓄えられる電気エネルギー
＋面内に蓄えられる磁気エネルギー
＋内部損失

マイナス符号は閉面Sへの流入を示す。(n^は外向き単位ベクトル)

$$-\oint_S \underbrace{(\vec{E}\times\vec{H})}_{\vec{S}\ [\mathrm{V/m}][\mathrm{A/m}]=[\mathrm{W/m^2}]}\bullet d\vec{s}=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2}_{w_e\ [\mathrm{J/m^3}]}+\underbrace{\frac{1}{2}\mu_0H^2}_{w_m\ [\mathrm{J/m^3}]}\right)dv+\int_V \underbrace{\vec{E}\bullet\vec{J}}_{\sigma E^2\ [\mathrm{A/m^2}][\mathrm{V/m}]=[\mathrm{W/m^3}]}dv$$

または

$$\oint_S \vec{S}\bullet(-ds\hat{n})=\frac{\partial}{\partial t}\int_v(w_e+w_m)dv+\int_V\sigma E^2\,dv$$

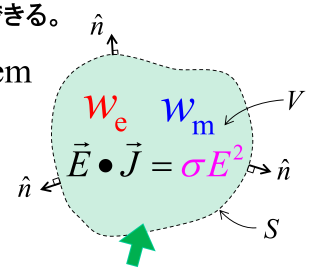
本定理の導出はレジュメ参照: https://www.kusamalab.org/lecture/em2/D4_poynting.pdf

---

ポインティングの定理（微分形）

※微分形と積分形はガウスの発散定理で相互に変換できる。

$$\int_V \nabla\bullet\vec{A}\,dv=\oint_S\vec{A}\bullet d\vec{s}\quad :\text{Gauss's theorem}$$



$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$
ポインティングベクトル

【電磁界版のエネルギー保存則】
閉面Sへの流入電力＝
面内に蓄えられる電気エネルギー
＋面内に蓄えられる磁気エネルギー
＋内部損失

$$-\nabla\bullet\underbrace{(\vec{E}\times\vec{H})}_{\vec{S}\ [\mathrm{V/m}][\mathrm{A/m}]=[\mathrm{W/m^2}]}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2}_{w_e\ [\mathrm{J/m^3}]}+\underbrace{\frac{1}{2}\mu_0H^2}_{w_m\ [\mathrm{J/m^3}]}\right)+\underbrace{\vec{E}\bullet\vec{J}}_{\sigma E^2\ [\mathrm{A/m^2}][\mathrm{V/m}]=[\mathrm{W/m^3}]}$$

鹿児島, 光・電磁波工学, p.41, コロナ社, 2003

(復習)保存場の性質

別名:静電界版のエネルギー保存の法則

位置エネルギー(ポテンシャルエネルギーPE)が運動エネルギーKE(電荷の加速)に変化するだけ

積分路が閉じていることを示す記号

電界 [V/m]=[N/C]

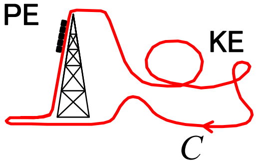
積分路を構成する微小線素 [m]

$$\oint_C \underbrace{\vec{E} \bullet d\vec{l}}_{仕事} = 0$$

内積記号

仕事 {する仕事(能動) / される仕事(受動)

積分が積分路Cに沿った線積分であること示す記号



PE: Potential Energy

KE: Kinetic Energy

ポインティングの定理(左辺)

【演習】電界振幅E、波動インピーダンスη中の等方性媒質中の平面電磁波は、単位面積当たりE^2/ηの電力を伝送することを示せ。(教科書, p.153)

$$\boxed{\oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{s}}$$

平面波のポインティングベクトルS [W/m²]は、電界E [V/m]と磁界 H [A/m]の積なので

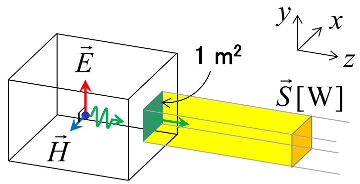
$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = E\hat{y}\times H(-\hat{x}) = EH\hat{z}$$

したがって、Sの大きさは

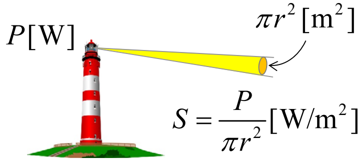
$$S = EH = E\frac{E}{\eta} = \frac{E^2}{\eta} \ [\mathrm{W/m^2}]$$

ただし、η=E/H : 波動インピーダンス

となる。これは、平面波が進行方向にS [W/m²]の電力即ち、単位面積あたりS [W]の電力を伝送していることになる。



単位面積あたりS [W]



スポット断面半径がr [m]のとき

安達, 石曽根, 電磁波工学演習, p.6, コロナ社, 1986

ポインティングの定理(右辺①)

【演習】等方性媒質中の平面電磁波は、そのエネルギーの半分を電界エネルギーの形で、残りの半分を磁界のエネルギーの形で運ぶことを示せ。(教科書, p.154)

$$\boxed{\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) dv}$$

平面波の波動インピーダンスηは

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

両辺を2乗して整理すると

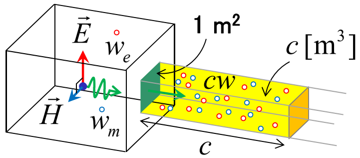
$$\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$$

両辺1/2倍すれば

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

即ち、空間に蓄えられる電気エネルギーw_eと磁気エネルギーw_mは常に等しく以下の関係がある。

$$w_e = w_m \quad [\mathrm{J/m^3}]$$



1秒間あたり平面波はc [m]進むので、単位断面積で長さc [m]のc [m³]の空間には$c(w_e+w_m)$ [J]のエネルギーが充満している。

$$c(w_e + w_m) = cw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{E^2}{\eta}$$

これは先に計算したポインティングベクトルS=E²/ηに等しい。即ち、伝送電力は電磁エネルギーとして空間に蓄積されていることを意味する。

安達, 石曽根, 電磁波工学演習, p.6, コロナ社, 1986

ポインティングの定理(右辺②)

$$\boxed{\int_V \vec{E}\bullet\vec{J}\,dv}$$

電流密度を電界で表す(物質内部のオームの法則※)と

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

これとEとの内積をとると、

$$\vec{E}\bullet\vec{J} = \vec{E}\bullet\sigma\vec{E} = \sigma E^2$$

従って、もとの体積分は

$$\int_V \vec{E}\bullet\vec{J}\,dv = \int_V \sigma E^2\,dv$$

となる。ここで、右辺の積分記号内の単位系について考えると,

σ E E

[S/m] [V/m] [V/m]

= [V²/Ω m³] = [VA/m³] = [W/m³]

即ち、伝送電力が電磁エネルギーとして空間に蓄積され、その一部はジュール損失として体積V内で消費されることを意味する。

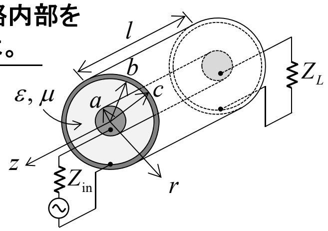
【演習】地球と月の間に平行2線を張って地球側に電源とスイッチを置き、月には電球を置いて接続した。地球側でSWをONにしたとき、月面にいる観察者が電球の点灯を確認するのは何秒後か。なお、地球と月面の距離をL [m]とし、光速はc [m/s]とする。

※ https://www.kusamalab.org/lecture/em1/D1_current_slide.pdf

答え: t=L/c [s]

ポインティング電力の計算例

【演習】同軸線路に電圧Vと電流Iを印加するとき、線路内部を伝搬するポインティングベクトルから伝送電力を求めよ。



【解答】ガウスの法則とアンペアの法則より、同軸線路内部の電界Eと磁界Hは

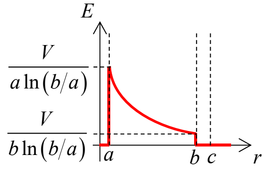
$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rl}\hat{r}, \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

ポインティングベクトルSから伝送電力Pを求めると

$$P = \int_S (\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{s} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=a}^{b}\frac{QI}{(2\pi r)^2\varepsilon_0 l}\hat{z}\bullet r dr d\phi\hat{z}$$

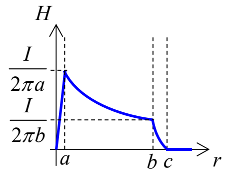
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{QI}{\varepsilon_0 l}\int_a^b \frac{1}{r}dr = \frac{QI}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

円筒座標系 (r, φ, z)における微小面積



一方、求めた電界Eから電位差Vを求めると

$$V = -\int_b^a \vec{E}\bullet d\vec{r} = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rl}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$



であるから、同軸線路内の電磁波による伝送電力P [W]は電気回路電圧・電流によるの伝送電力P=VI [W]に等しい。

安達, 石曽根, 電磁波工学演習, p.5, コロナ社, 1986

微分形ポインティングの定理の導出(1)

ベクトル公式 $\nabla\bullet(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\bullet(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\bullet(\nabla\times\vec{B})$ において、
AをEに、BをHに置き換えると

$$\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H})$$

ファラデーの法則とアンペアの法則を使って右辺の計算をすると、

$$\vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{E}) = \vec{H}\bullet\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H}) = \vec{E}\bullet\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

上から下を引くと

$$\vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H}) = \vec{H}\bullet\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\bullet\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = -\mu_0\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \vec{E}\bullet\vec{J} - \varepsilon_0\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{1}{2}\mu_0\frac{\partial}{\partial t}H^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E^2 - \vec{E}\bullet\vec{J}$$

この変形は次ページで証明

微分形ポインティングの定理の導出(2)

$$\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\bullet\frac{\partial}{\partial t}(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})$$

$$= A_x\frac{\partial A_x}{\partial t} + A_y\frac{\partial A_y}{\partial t} + A_z\frac{\partial A_z}{\partial t}$$

ここで、 $\frac{\partial A_x^2}{\partial t} = 2A_x\frac{\partial A_x}{\partial t}$ であることを利用すると(∵A_xは x, y, z, t の関数)
$A_x(x, y, z, t)$

$$\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial A_x^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_y^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial A_z^2}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\vec{A}|^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}A^2$$

ベクトル公式

ベクトル公式 $\nabla\bullet(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\bullet(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\bullet(\nabla\times\vec{B})$ の証明

$$\nabla\bullet(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\times\vec{B})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{A}\times\vec{B})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{A}\times\vec{B})_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z - A_zB_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x - A_xB_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$= \frac{\partial A_y}{\partial x}B_z + A_y\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}B_y - A_z\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial A_z}{\partial y}B_x + A_z\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y}B_z - A_x\frac{\partial B_z}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial A_x}{\partial z}B_y + A_x\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial z}B_x - A_y\frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$- A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) - A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) - A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$= \vec{B}\bullet(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\bullet(\nabla\times\vec{B})$$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

安達, ベクトル解析 改訂版, p.86, 培風館, 1961.