同軸線路の特性インピーダンス

v1.9$_{\rm ym}$ Jun.2014　　　　＿＿＿＿＿ 科 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 番　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 特性インピーダンスの導出手順

高周波の伝送線路として最もよく使われる同軸線路の特性インピーダンスを導出する。導出手順は次のようである。まず，単位長さあたりのキャパシタンス C [F/m] を**ガウスの法則**から導出する。次に単位長さあたりのインダクタンス L [H/m] を**アンペアの法則**から導出し，最後に無損失 $R\ [\Omega/\mathrm{m}] = G\ [\mathrm{S/m}] = 0$ の場合における特性インピーダンスの式，$Z_0 = \sqrt{L/C}$ に求めた C と L を代入する。

2. キャパシタンスの導出

図 1 に示す内導体の半径 a [m]，外導体の内半径が b [m]，外導体の外半径が c [m]，長さ 1 [m] の同軸ケーブルがある。導体間の空洞は誘電体であり，その誘電率は ε [F/m]，透磁率は μ [H/m] である。いま，内導体に $+Q$ [C]，外導体に $-Q$ [C] の電荷を与えると，電荷は内導体では $r = a$ の円筒表面に電荷が集中し，外導体では $r = b$ の内表面に電荷が集中する。$a < r < b$ の領域においてガウス閉面 S を半径 r で長さ 1 m の円筒と考えると，ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \tag{1}$$

ここで $\vec{D} = D\hat{r}$, $d\vec{s} = ds\hat{r}$ であるから

$$\oint_S D\hat{r} \bullet ds\hat{r} = \oint_S Dds\cos 0 = \oint_S Dds = Q \tag{2}$$

さらに電束密度 D は軸対象であるから半径 r の円筒上どこでも同じ値となって積分に寄与しない。従って

$$D\oint_S ds = D2\pi r1 = Q \tag{3}$$

これより $a < r < b$ の領域の電束密度 D は

$$D = \frac{Q}{2\pi r} \tag{4}$$

となり，電界 E は $D = \varepsilon E$ より

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r} \tag{5}$$

となる[*1]。また同軸線路内部の電界分布を図示すると図 2 左のようになる。ここで内導体と外導体の間の電位差を求めると

$$V = -\int_b^a E dr = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\varepsilon r} dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon}(\ln b - \ln a) \tag{6}$$

となるから，$Q = CV$ の関係より単位長さあたりの C は次式となる。

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln b/a} \quad [\mathrm{F/m}] \tag{7}$$

3. インダクタンスの導出

今度は内導体に電流 $I\hat{z}$，外導体に電流 $I(-\hat{z})$ の往復電流が流れている場合を考える。$a < r < b$ の領域において，積分路 C を半径 r の円周と考えると，アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I \tag{8}$$

ここで $\vec{H} = H\hat{\varphi}$, $d\vec{l} = dl\hat{\varphi}$ であるから[*2]

$$\oint_C H\hat{\varphi} \bullet dl\hat{\varphi} = \oint_C Hdl\cos 0 = \oint_C Hdl = I \tag{9}$$

さらに磁界 H は軸対象であるから半径 r の円筒上どこでも同じ値となって積分に寄与しない。従って

$$H\oint_C dl = H2\pi r = I \tag{10}$$

これより $a < r < b$ の領域の磁界 H は

$$H = \frac{I}{2\pi r} \tag{11}$$

となり，磁束密度 B は $B = \mu H$ より

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \tag{12}$$

となる[*3]。また同軸線路内部の磁界分布を図示すると図 2 右のようになる。ここで内導体と外導体の間を貫く磁束鎖交数[*4]を求めると

$$\varphi = \Phi = \int_{z=0}^1 \int_{r=a}^b B drdz = \int_0^1 \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r} drdz = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \tag{13}$$

となるから，$\varphi = LI$ の関係より，単位長さあたりの L は

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad [\mathrm{H/m}] \tag{14}$$

となる。式 (7) と式 (14) より特性インピーダンスは

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\frac{\ln b/a}{2\pi\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a} \tag{15}$$

となる。

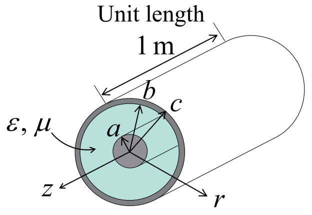

図 1　同軸線路のモデル

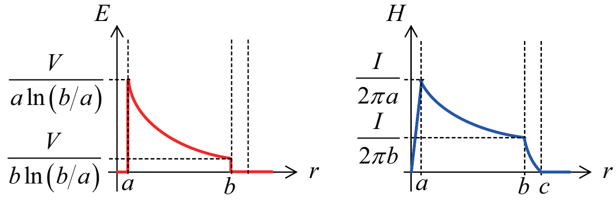

図 2　同軸線路内の電界・磁界分布

4. 特性インピーダンスの値 50Ω, 75Ω 系の決定

実際に使われている同軸線路の特性インピーダンスは 50 Ω か 75 Ω に統一されている[*5]。式 (15) を変形すると

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{b}{a} = \frac{59.9586}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{b}{a} = \frac{138.061}{\sqrt{\varepsilon_r}}\log\frac{b}{a} \tag{16}$$

となり，a, b および ε_r を決めれば特性インピーダンスは決まる。しかしながら充填材料の材質 ε_r を先に決めても a, b のとり方には無限の組み合わせがある。そこで導体損失[*6]が最小となるように a, b を決定する。同軸線路の主モードである TEM の導体損失は次式で与えられる[*7]。

$$\alpha_c = \frac{1}{2}\frac{R_S}{\ln b/a}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\omega\mu_0/2\sigma}}{\eta\ln b/a}\frac{1}{b}\left(\frac{b}{a} + 1\right) \tag{17}$$

ここで b/a を x とおくと式 (17) は次の関数 $f(x)$ に比例する。

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln x} \tag{18}$$

この関数 $f(x)$ が最小となる $x = b/a$ を選べば導体損失 α_c も最小になる。極小を与える $f'(x) = 0$ の条件から x を求めると[*8]

$$x = b/a = 3.5911 \tag{19}$$

が得られる。$\varepsilon_r = 1$ (空気) および $\varepsilon_r = 2.1$ (テフロン) のときについて式 (19) を式 (16) に代入して Z_0 を求めると

$$Z_0 = 52.9 \quad \Omega, \qquad Z_0 = 76.7 \quad \Omega \tag{20}$$

が得られるが，区切りのよい値として $Z_0 = 50\ \Omega$ および $Z_0 = 75\ \Omega$ が使われている。

[*1] 本題とは関係ないが $r < a$, $b < r < c$, $c < r$ の各領域については，同様にガウスの法則からすべて $E = 0$ になる。

[*2] $\hat{\varphi}$ は円筒座標 (r, φ, z) における円周方向の単位ベクトルである。3 次元空間座標は 3 つの直交した基本ベクトルがあれば表現できる。最もよく使う座標 (x, y, z) はデカルト座標または直角座標と呼ばれる。直角座標を使って電束密度を表現しようとすると $\hat{x}, \hat{y}$ の 2 つの単位ベクトルが必要になる。これに対して円筒座標を使えば $\hat{r}$ だけで表現できる。

[*3] 本題とは関係ないが $r < a$, $b < r < c$, $c < r$ の各領域については，内導体の電流密度を $J_{in} = I/\pi a^2$, 外導体の電流密度 $J_{out} = -I/(\pi c^2 - \pi b^2)$ として，同様にアンペアの法則から次のようになる。

$$H_1 = \frac{I}{2\pi a^2} r\ (r < a),\ H_3 = \frac{I}{2\pi r}\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\ (b < r < c),\ H_4 = 0\ (c < r)$$

[*4] 磁束鎖交数 φ と磁束 Φ の関係式 $\varphi = N\Phi$ において，この場合の巻数は $N = 1$ である。

[*5] 50 Ω は測定器系，75 Ω はテレビ系である。

[*6] 実際の線路の導電率 σ は無限大ではないので必ず導体損失が発生する。

[*7] Inan, "Electromagnetic Waves," p.367, Pozar, p.81,

[*8] 非線形方程式の解を求める必要があるので，二分法，はさみうち法，ニュートン法などを使って解を求める。