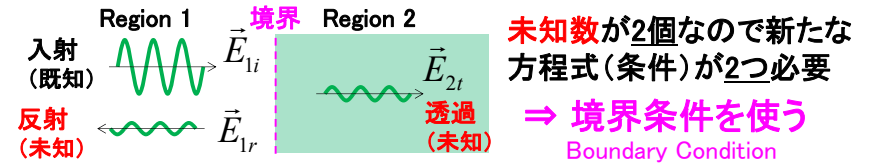


平面波と境界条件

1st 2011/04/22

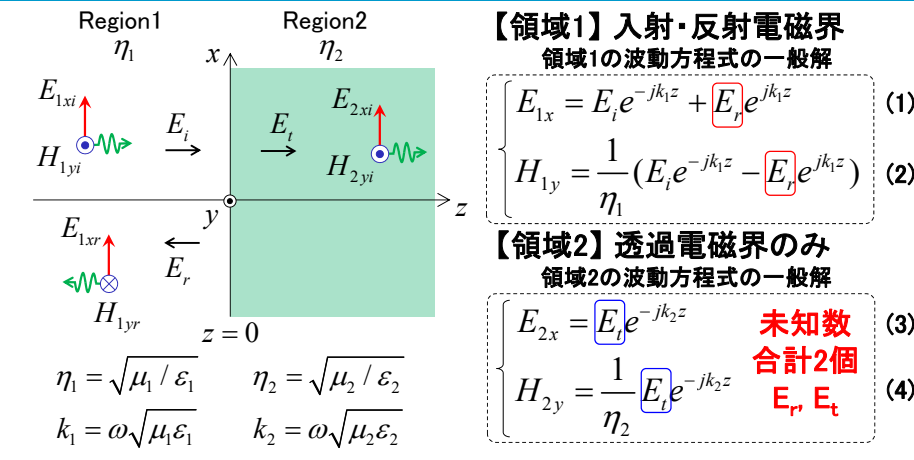
Lst 2023/01/20

電磁波における境界条件の用途



	媒質1	媒質2
支配方程式 連立 微分方程式	$\nabla \times \vec{H}_1 = j\omega\epsilon_1 \vec{E}_1$ (1)	$\nabla \times \vec{H}_2 = j\omega\epsilon_2 \vec{E}_2$ (7)
	$\nabla \times \vec{E}_1 = -j\omega\mu_1 \vec{H}_1$ (2)	$\nabla \times \vec{E}_2 = -j\omega\mu_2 \vec{H}_2$ (8)
波動方程式 微分方程式	$\nabla^2 \vec{E}_1 + k_1^2 \vec{E}_1 = 0$ (3)	$\nabla^2 \vec{E}_2 + k_2^2 \vec{E}_2 = 0$ (9)
	$\vec{H}_1 = -\frac{1}{j\omega\mu_1} \nabla \times \vec{E}_1$ (2)'	$\vec{H}_2 = -\frac{1}{j\omega\mu_2} \nabla \times \vec{E}_2$ (8)'
入射波・反射波の分離 代数方程式	$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1i} + \vec{E}_{1r}$ (5) 未知	$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t}$ (10) 未知
	$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1i} + \vec{H}_{1r}$ (6)	$\vec{H}_2 = \vec{H}_{2t}$ (11) 未知 <small>磁界Hは波動インピーダンスから自動的に求まる</small>

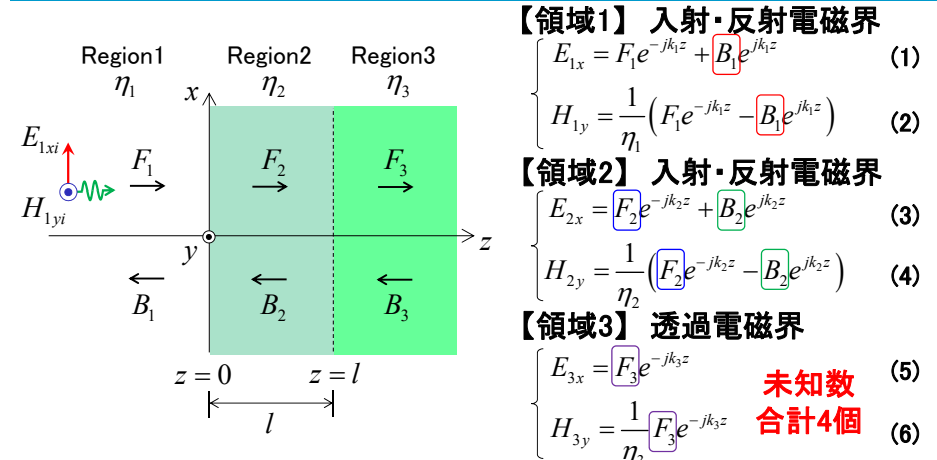
2層媒質の解析



境界条件

$$\begin{cases} E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} & \text{条件方程式2個} & (5) \\ H_{1y}|_{z=0} = H_{2y}|_{z=0} & \begin{matrix} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{matrix} & (6) \end{cases}$$

3層媒質の解析

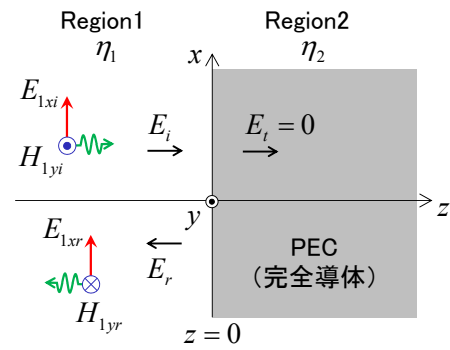


境界条件

$$\begin{cases} E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} & (7) \\ H_{1y}|_{z=0} = H_{2y}|_{z=0} & (8) \end{cases} \quad \begin{cases} E_{2x}|_{z=l} = E_{3x}|_{z=l} & (9) \\ H_{2y}|_{z=l} = H_{3y}|_{z=l} & (10) \end{cases}$$

条件方程式4個
 $E_{1t} = E_{2t}, E_{2t} = E_{3t}$
 $H_{1t} = H_{2t}, H_{2t} = H_{3t}$

2層媒質の解析(PECの場合)



【領域1】 入射・反射電磁界

$$\begin{cases} E_{1x} = E_i e^{-jk_1 z} + E_r e^{jk_1 z} & (1) \\ H_{1y} = \frac{1}{\eta_1} (E_i e^{-jk_1 z} - E_r e^{jk_1 z}) & (2) \end{cases}$$

【領域2】 透過電磁界のみ

$$\begin{cases} E_{2x} = 0 & \text{未知数} & (3) \\ H_{2y} = 0^* & \text{合計1個} & (4) \end{cases}$$

Er

※全反射によって完全導体内部では電磁界がゼロになるが、境界表面における磁界はゼロにはならず表面電流に変わる。

境界条件 $E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0}$ (5) 条件方程式1個 $E_{1t} = E_{2t}$

※Perfect Electric Conductor (PEC)

2層媒質の解析例(PECの場合)

① z=0における領域1の電磁界

$$\begin{cases} E_{1x} = E_i + E_r & (1) \\ H_{1y} = \frac{1}{\eta_1} (E_i - E_r) & (2) \end{cases}$$

② z=0における領域2の電磁界

$$\begin{cases} E_{2x} = 0 & (3) \\ H_{2y} = ?^* & (4) \end{cases}$$

※z=0における磁界は導体表面電流となるので未知量だが、実用上は?のまま問題ない。

③ z=0における境界条件の適用

$$\begin{cases} E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} & (5) \\ E_i + E_r = 0 & \text{未知数1個} & (6) \\ E_r = -E_i & E_r \text{の確定} \end{cases}$$

(1)(2)から未知数Erを消去して、既知のEiのみで表すと

$$\begin{cases} E_{1x} = E_i (e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}) & (7) \\ H_{1y} = \frac{E_i}{\eta_1} (e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z}) & (8) \end{cases}$$

ここで、指数関数と三角関数の関係(オイラーの公式)

$$\begin{cases} e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z} = -2j \sin k_1 z & (9) \\ e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z} = 2 \cos k_1 z & (10) \end{cases}$$

を使うと(7)(8)は次式となる。

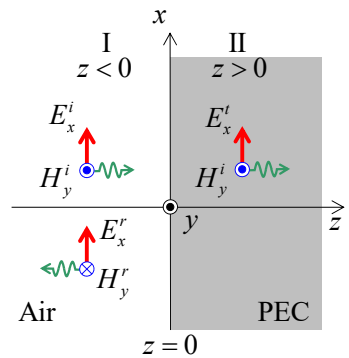
$$\begin{cases} E_{1x} = -2j \sin k_1 z & (11) \\ H_{1y} = \frac{E_i}{\eta_1} 2 \cos k_1 z & (12) \end{cases}$$

これは定在波と呼ばれる。

ejωtで時間振動はするが、z軸上には平行移動しない。

2層媒質の解析例

【演習】平面波がz=0面に置かれた完全導体に垂直入射したとき、z < 0の領域の電磁界を求めよ。ただし、入射電界は $E_{ix} = \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t - kz)$ とする。(教科書、演習10.8)



- i : Incident wave
- r : Reflected wave
- t : Transmitted wave
- PEC : Perfect Electric Conductor

Incident wave

$$\begin{cases} E_x^i = A \cos(\omega t - kz) \\ H_y^i = \frac{A}{Z_1} \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

波動方程式の解

2層媒質の解析例

【解答】各領域の電磁界は

Incident wave

$$\begin{cases} E_x^i = A \cos(\omega t - kz) & (1) \\ H_y^i = \frac{A}{Z_1} \cos(\omega t - kz) & (2) \end{cases}$$

Reflected wave

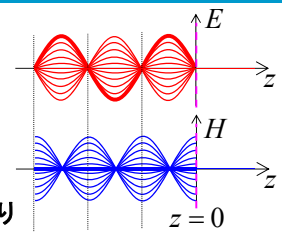
$$\begin{cases} E_x^r = B \cos(\omega t + kz) & (3) \\ H_y^r = -\frac{B}{Z_1} \cos(\omega t + kz) & (4) \end{cases}$$

Transmitted wave

$$\begin{cases} E_x^t = C \cos(\omega t - kz) = 0 & (5) \\ H_y^t = \frac{C}{Z_2} \cos(\omega t - kz) = ? & (6) \end{cases}$$

Boundary Condition

$$\begin{cases} E_x^i|_{z=0} + E_x^r|_{z=0} = E_x^t|_{z=0} \\ A \cos \omega t + B \cos \omega t = 0 \\ B = -A = -\sqrt{2} E_0 \end{cases} \quad (7)$$



領域Iの合成電界は(1)(3)より

$$\begin{aligned} E &= E_x^i + E_x^r \\ &= \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t - kz) - \sqrt{2} E_0 \cos(\omega t + kz) \\ &= 2\sqrt{2} E_0 \sin kz \sin \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

領域Iの合成磁界は(2)(4)より

$$\begin{aligned} H &= H_y^i + H_y^r \\ &= \frac{\sqrt{2} E_0}{Z_1} \cos(\omega t - kz) + \frac{\sqrt{2} E_0}{Z_1} \cos(\omega t + kz) \\ &= \frac{2\sqrt{2} E_0}{Z_1} \cos kz \cos \omega t \end{aligned} \quad (9)$$

(8)(9)は時間振動はするが、z軸上では平行移動しないので、定在波と呼ばれる。

定在波の電界と磁界は、空間軸でπ/2、時間軸でもπ/2互いにシフトしている。