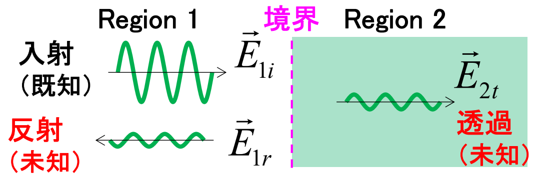
平面波と境界条件

1st 2011/04/22
Lst 2022/01/07

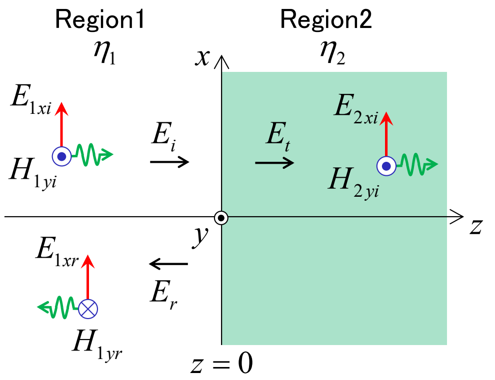
電磁波における境界条件の使途



未知数が2個なので新たな方程式(条件)が2つ必要
⇒ **境界条件を使う**
Boundary Condition

	媒質1	媒質2
支配方程式 連立微分方程式	$\nabla\times\vec{H}_1 = j\omega\varepsilon_1\vec{E}_1$ (1) $\nabla\times\vec{E}_1 = -j\omega\mu_1\vec{H}_1$ (2)	$\nabla\times\vec{H}_2 = j\omega\varepsilon_2\vec{E}_2$ (7) $\nabla\times\vec{E}_2 = -j\omega\mu_2\vec{H}_2$ (8)
波動方程式 微分方程式	$\nabla^2\vec{E}_1 + k_1^2\vec{E}_1 = 0$ (3) $\vec{H}_1 = -\dfrac{1}{j\omega\mu_1}\nabla\times\vec{E}_1$ (2)'	$\nabla^2\vec{E}_2 + k_1^2\vec{E}_2 = 0$ (9) $\vec{H}_2 = -\dfrac{1}{j\omega\mu_2}\nabla\times\vec{E}_2$ (8)'
入射波・反射波の分離 代数方程式	$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1i} + \vec{E}_{1r}$ 未知 (5) $\vec{H}_1 = \vec{H}_{1i} + \vec{H}_{1r}$ (6)	$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t}$ 未知 (10) $\vec{H}_2 = \vec{H}_{2t}$ (11) 磁界Hは波動インピーダンスから自動的に求まる

2層媒質の解析



$\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$　$\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$

$k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$　$k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$

【領域1】入射・反射電磁界
領域1の波動方程式の一般解

$$\begin{cases} E_{1x} = E_i e^{-jk_1z} + \boxed{E_r} e^{jk_1z} & (1) \\ H_{1y} = \dfrac{1}{\eta_1}\left(E_i e^{-jk_1z} - \boxed{E_r} e^{jk_1z}\right) & (2) \end{cases}$$

【領域2】透過電磁界のみ
領域2の波動方程式の一般解

$$\begin{cases} E_{2x} = \boxed{E_t} e^{-jk_2z} & (3) \\ H_{2y} = \dfrac{1}{\eta_2}\boxed{E_t} e^{-jk_2z} & (4) \end{cases}$$

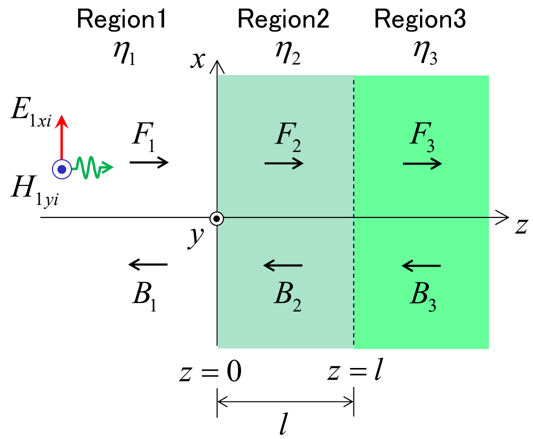
未知数合計2個
E_r, E_t

境界条件

$$\begin{cases} E_{1x}\,|_{z=0} = E_{2x}\,|_{z=0} & (5) \\ H_{1y}\,|_{z=0} = H_{2y}\,|_{z=0} & (6) \end{cases}$$

条件方程式2個
$E_{1t}=E_{2t}$
$H_{1t}=H_{2t}$

3層媒質の解析



【領域1】 入射・反射電磁界

$$\begin{cases} E_{1x} = F_1 e^{-jk_1z} + \boxed{B_1} e^{jk_1z} & (1) \\ H_{1y} = \dfrac{1}{\eta_1}\left(F_1 e^{-jk_1z} - \boxed{B_1} e^{jk_1z}\right) & (2) \end{cases}$$

【領域2】 入射・反射電磁界

$$\begin{cases} E_{2x} = \boxed{F_2} e^{-jk_2z} + \boxed{B_2} e^{jk_2z} & (3) \\ H_{2y} = \dfrac{1}{\eta_2}\left(\boxed{F_2} e^{-jk_2z} - \boxed{B_2} e^{jk_2z}\right) & (4) \end{cases}$$

【領域3】 透過電磁界

$$\begin{cases} E_{3x} = \boxed{F_3} e^{-jk_3z} & (5) \\ H_{3y} = \dfrac{1}{\eta_3}\boxed{F_3} e^{-jk_3z} & (6) \end{cases}$$

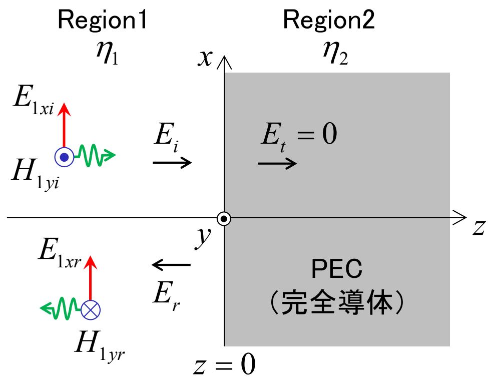
未知数合計4個

境界条件

$$\begin{cases} E_{1x}\,|_{z=0} = E_{2x}\,|_{z=0} & (7) \\ H_{1y}\,|_{z=0} = H_{2y}\,|_{z=0} & (8) \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{2x}\,|_{z=l} = E_{3x}\,|_{z=l} & (9) \\ H_{2y}\,|_{z=l} = H_{3y}\,|_{z=l} & (10) \end{cases}$$

条件方程式4個
$E_{1t}=E_{2t}$, $E_{2t}=E_{3t}$
$H_{1t}=H_{2t}$, $H_{2t}=H_{3t}$

2層媒質の解析(PECの場合)



※Perfect Electric Conductor (PEC)

【領域1】 入射・反射電磁界

$$\begin{cases} E_{1x} = E_i e^{-jk_1 z} + \boxed{E_r} e^{jk_1 z} & (1) \\ H_{1y} = \dfrac{1}{\eta_1}(E_i e^{-jk_1 z} - \boxed{E_r} e^{jk_1 z}) & (2) \end{cases}$$

【領域2】 透過電磁界のみ

$$\begin{cases} E_{2x} = 0 & (3) \\ H_{2y} = 0^* & (4) \end{cases}$$

未知数
合計1個
E_r

※全反射によって完全導体内部では電磁界がゼロになるが、境界表面における磁界はゼロにはならず表面電流に変わる。

境界条件 $\left\{ E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} \right.$ (5)

条件方程式1個
$E_{1t}=E_{2t}$

2層媒質の解析例(PECの場合)

① z=0における領域1の電磁界

$$\begin{cases} E_{1x} = E_i + \boxed{E_r} & (1) \\ H_{1y} = \dfrac{1}{\eta_1}(E_i - \boxed{E_r}) & (2) \end{cases}$$

② z=0における領域2の電磁界

$$\begin{cases} E_{2x} = 0 & (3) \\ H_{2y} = ?^* & (4) \end{cases}$$

※z=0における磁界は導体表面電流となって未知数だが、実用上は?として問題ない

③ z=0における境界条件の適用

$$\left\{ E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0} \right. \quad (5)$$

$$E_i + E_r = 0$$

$$\boxed{E_r} = -E_i \quad (6)$$

未知数1個
E_rの確定

(1)(2)から未知数E_rを消去して、既知のE_iのみで表すと

$$\begin{cases} E_{1x} = E_i(e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}) & (7) \\ H_{1y} = \dfrac{E_i}{\eta_1}(e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z}) & (8) \end{cases}$$

ここで、指数関数と三角関数の関係(オイラーの公式)

$$\begin{cases} e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z} = -2j\sin k_1 z & (9) \\ e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z} = 2\cos k_1 z & (10) \end{cases}$$

を使うと(7)(8)は次式となる。

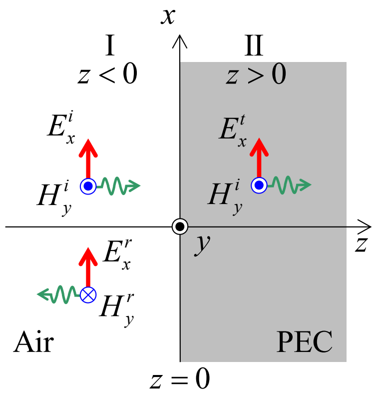
$$\begin{cases} E_{1x} = -2j\sin k_1 z & (11) \\ H_{1y} = \dfrac{E_i}{\eta_1} 2\cos k_1 z & (12) \end{cases}$$

これは定在波と呼ばれる。

$e^{j\omega t}$で時間振動はするが、z軸上には平行移動しない。

2層媒質の解析例

【演習】平面波がz=0面に置かれた完全導体に垂直入射したとき, z <0の領域の電磁界を求めよ。ただし, 入射電界は $E_{ix} = \sqrt{2}\, E_0 \cos(\omega t - kz)$ とする。(教科書, 演習10.8)



- i : Incident wave
- r : Reflected wave
- t : Transmitted wave
- PEC : Perfect Electric Conductor

Incident wave

$$E_x^i = A\cos(\omega t - kz)$$

$$\rightarrow E_x^i = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{k}{\omega}z\right)\right] \quad f\left(t - \frac{z}{v}\right) \text{の形}$$

$$\rightarrow E_x^i = A\cos\left[-k(z - vt)\right] \quad f(z - vt) \text{の形}$$

$$H_y^i = \frac{A}{Z_1}\cos(\omega t - kz)$$

$$A = \sqrt{2}E_0$$

波動方程式の解

https://www.kusamalab.org/lecture/rflw/gif_animation/voltage_g1.0.gif

2層媒質の解析例

【解答】
各領域の電磁界は

Incident wave

$$\begin{cases} E_x^i = A\cos(\omega t - kz) & (1) \\ H_y^i = \dfrac{A}{Z_1}\cos(\omega t - kz) & (2) \\ A = \sqrt{2}E_0 \end{cases}$$

Reflected wave

$$\begin{cases} E_x^r = B\cos(\omega t + kz) & (3) \\ H_y^r = -\dfrac{B}{Z_1}\cos(\omega t + kz) & (4) \end{cases}$$

Transmitted wave

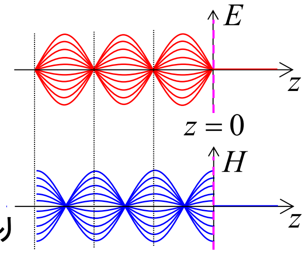
$$\begin{cases} E_x^t = C\cos(\omega t - kz) = 0 & (5) \\ H_y^t = \dfrac{C}{Z_2}\cos(\omega t - k_2 z) = ? & (6) \end{cases}$$

Boundary Condition

$$E_x^i\Big|_{z=0} + E_x^r\Big|_{z=0} = E_x^t\Big|_{z=0}$$

$$A\cos\omega t + B\cos\omega t = 0$$

$$B = -A = -\sqrt{2}E_0 \quad (7)$$



λ/2ごとに節と腹を繰り返す。

領域Iの合成電界は(1)(3)より

$$E = E_x^i + E_x^r$$
$$= \sqrt{2}E_0\cos(\omega t - kz) - \sqrt{2}E_0\cos(\omega t + kz)$$
$$= 2\sqrt{2}E_0 \sin kx \sin\omega t \quad (8)$$

領域Iの合成磁界は(2)(4)より

$$H = H_y^i + H_y^r$$
$$= \frac{\sqrt{2}E_0}{Z_1}\cos(\omega t - kz) + \frac{\sqrt{2}E_0}{Z_1}\cos(\omega t + kz)$$
$$= \frac{2\sqrt{2}E_0}{Z_1}\cos kz \cos\omega t \quad (9)$$

(8)(9)は時間振動はするが、z軸上では平行移動しないので、定在波と呼ばれる。