「数学や物理というのは、神様のやっているチェスを横から眺めて(我々人間には全体像は見えていないという意味)、そこにどんなルールがあるのか、どんな美しい法則があるのか、探していくことだ」・・・by ファインマン

# 静磁界の基本方程式

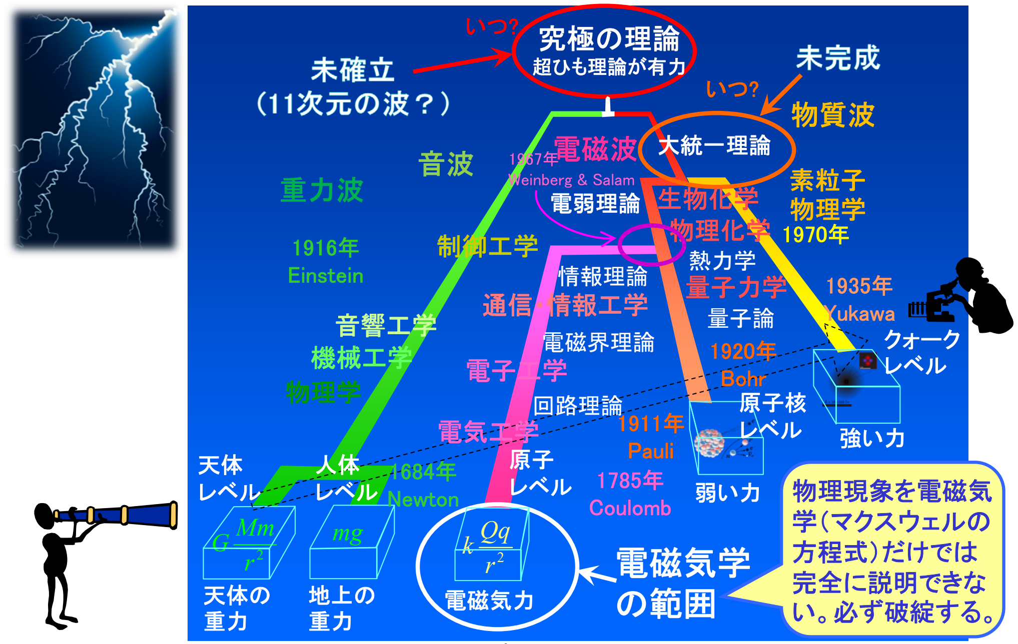
## – 磁気の根源からマクスウェルの方程式まで –

1st. 2021/10/19
Lst. 2022/01/07

電気の「電」の語源は？・・・雨雲の中に竜が昇る姿に似ていたから。
磁気の「磁」の語源は？・・・吸着する砂鉄が、母親の乳房に赤子が吸付く様子に似ていたため、「慈」しむ石とした。
電磁気の「気」とは何？・・・目には見えないが、存在が感じられる何らかの作用を意味する。
電磁気は電気の専門？・・・電磁気学や電磁波工学は、電気系の専門科目ではなく物理学の一分野です。



# 宇宙にある4つの力と派生科学




Newtonムック, "真空とインフレーション宇宙論," ニュートンプレス, p.139



# 電磁気学の学習体系

| 区別 | 定義(約束) | 該当科目 |
|---|---|---|
| 静電気<br>(静電場) | 磁場は考えない。<br>時間変化は考えない。 | (初級)<br>**電磁気学I**<br>別名:電気力学 |
| 静磁気<br>(静磁場) | 電場は考えない。<br>時間変化は考えない。 | (中級)<br>**電磁気学II**<br>別名:磁気力学 |
| 動電磁気<br>(電磁場) | 電場／磁場ともに考える。<br>時間変化も考える。 | (上級)<br>**電磁波工学**<br>別名:電磁力学 |

動電気には交流回路、過渡現象、・・・　動電磁気にはアンテナ、高周波回路・・・
動磁気はトランス、交流モーター、・・・



# 電磁気学の体系整理

【電磁気＝空間3次元の問題】

電場と磁場の統一理論

「電磁気学」(クーロン-ローレンツ力)
→「電磁気学Ⅰ」＝電気力学＝静電場 (クーロン力・静電気)
→「電磁気学Ⅱ」＝磁気力学＝静磁場 (ローレンツ力・磁石)

電磁気学を『力学』と呼ぶ理由
電気エネルギー [J/m³] = [N/m²] = [Pa] : 圧力・応力に等しい。
磁気エネルギー [J/m³] = [N/m²] = [Pa] : 圧力・応力に等しい。

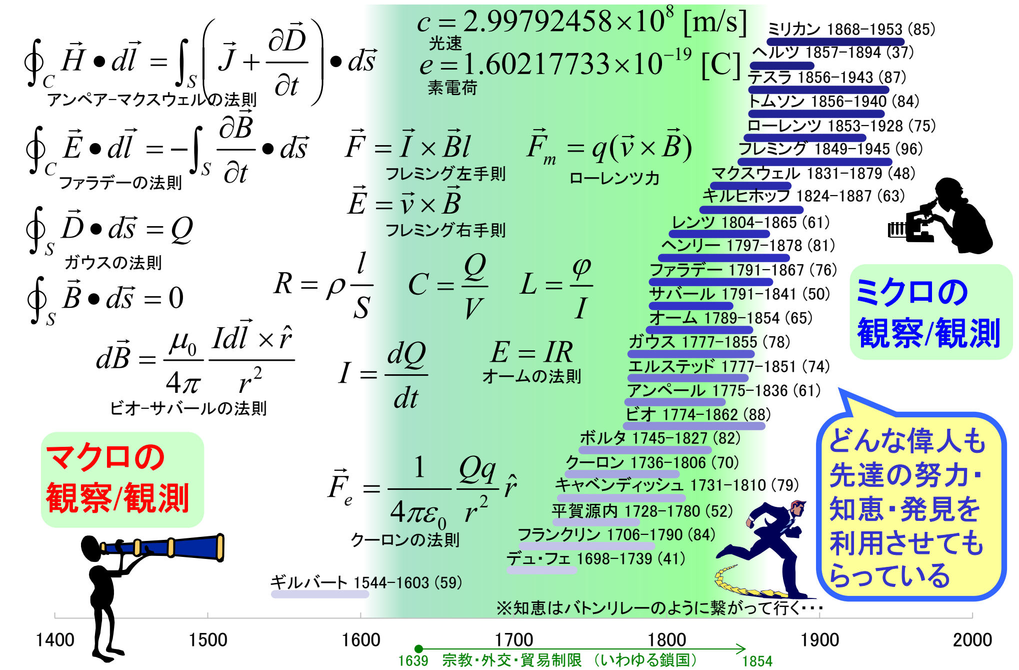
【電磁波＝4次元時空(空間3次元＋時間1次元)の問題】

電場と磁場と時間の統一理論

「電磁波工学」＝「電磁気学」＋「時間」＝動電磁場

例えば・・・直流回路は「空間1次元＋時間0次元」の1次元時空問題、
交流回路は「空間1次元＋時間1次元」の2次元時空問題、
**電磁界は「空間3次元＋時間1次元」の4次元時空問題となる。**
※次元が上がるほど変数が増えるのでより難しく感じるようになる。

# 電磁気学の偉人マップ






# 世の中は法則（秩序・ルール）だらけ

万有引力の法則 似たものは互いに引付けあう
運動の第１法則（慣性の法則） 止めない限り動き続ける
運動の第２法則（ニュートンの法則） 同じ力でも重いほど加速が鈍る $ma = F$
運動の第３法則（作用・反作用の法則） 押したら押し返される（釣合いの法則）
ハッブルの法則
フックの法則
ベルヌーイの法則
ケプラーの法則
ティティウス・ボーデの法則
質量保存の法則
運動量保存の法則
角運動量保存の法則
・・・

ヴィーンの放射法則
プランクの法則
ボイル＝シャルルの法則
ドルトンの法則
デュロン＝プティの法則
フィックの法則
ポアソンの法則
ヘンリーの法則
・・・

熱力学第零法則
熱力学第１法則（エネルギー保存の法則）
熱力学第２法則（エネルギー移動の方向性）
熱力学第3法則
熱伝導の法則
エントロピー増大の法則
レイリー・ジーンズの法則
シュテファン＝ボルツマンの法則

アボガドロの法則
親和性の法則
崩壊の法則
パレートの法則
ハインリッヒの法則 ・・・

オームの法則
ジュールの法則
キルヒホッフの第１法則（電流則）
キルヒホッフの第２法則（電圧則）
クーロンの法則
レンツの法則
ファラデーの法則
アンペアの法則
アンペア・マクスウェルの法則
右ねじの法則
ガウスの法則
ビオ・サバールの法則
フレミング左手の法則
フレミング右手の法則
マクスウェルの法則（方程式）

電磁気学で扱う範囲はタッタのこれだけ

ブラッグの法則
スネルの法則
キュリーの法則
ヴィーデマン＝フランツ則
ランベルト・ベールの法則 ・・・

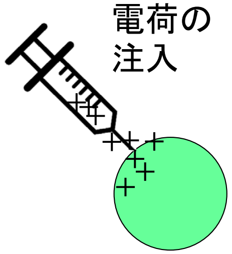
法則は目に見えず、耳に聞こえず、肌で感じられず、鼻にも臭わず、味を持つ物でもないが、法則を知っていればそれを逆に利用することはできる。

http://ja.wikipedia.org/wiki/物理法則

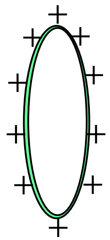


# 帯電導体の電荷分布

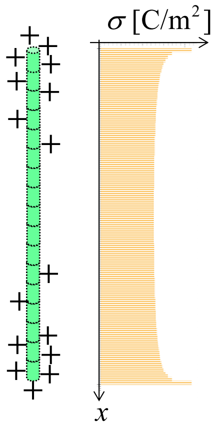
【例題】次のケースで、電荷はどのように分布するか？




(1) 導体球
または導体球殻



(2)導体円環



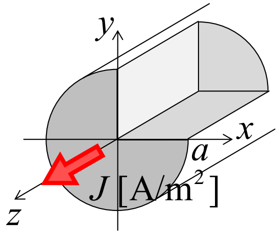

(3)導体棒

Answer： (1) クーロン力によって互いに反発するため、導体球表面に電荷が集中する。(2) 同じ理由で円環の外周に均一に分布する。(3) 同じ理由で導体棒のエッジに集中する。（均一にはならない。）



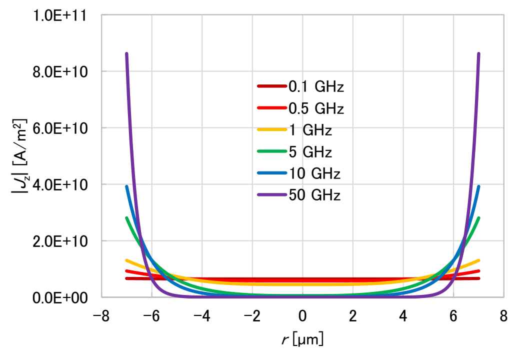
# 導体の電流分布（表皮効果）

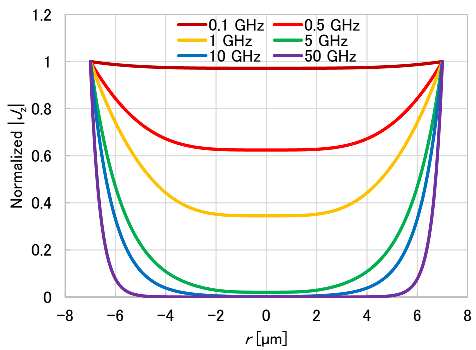
【計算条件】
アルミ線 $a = 7$ μm
導電率 $\sigma = 3.55 \times 10^7$ S/m
電流 $I = 1$ A
※日本人の髪の毛の
平均太さが 80 μm程度




$$
\begin{cases}
E_z = \dfrac{kI}{2\pi a\sigma} \dfrac{J_0(kr)}{J_1(ka)} \\
J_z = \dfrac{kI}{2\pi a} \dfrac{J_0(kr)}{J_1(ka)}
\end{cases}
$$

ただし, $k^2 = -j\omega\mu\sigma$





益一哉, "IoT/IoE 時代の集積回路設計に必要な電気 磁気学, " MWE2015, TH3A-1
砂川重信, 理論電磁気学 第 3 版, pp.181-184, 紀伊国 屋書店, 1999.

Mathematica v11.1

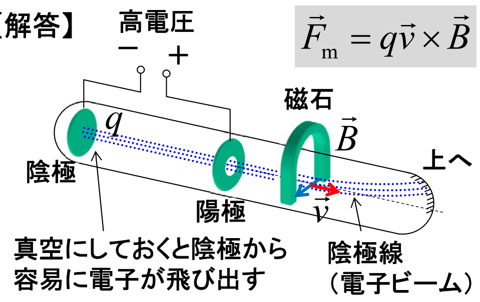
# トムソンの実験



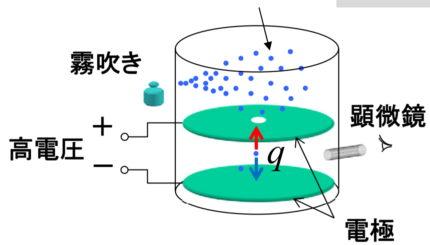
【例題】トムソンの比率とミリカンの実験から電子質量を求めよ。

【解答】

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v}\times\vec{B}$$




$$\vec{F}_{\mathrm{e}} = q\vec{E}$$




**トムソンの実験（1897）**

$$\frac{e}{m} = 1.758820088\times10^{11}\ \mathrm{C/kg}$$

**ミリカンの油滴実験（1912）**

$$e = 1.602176565\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

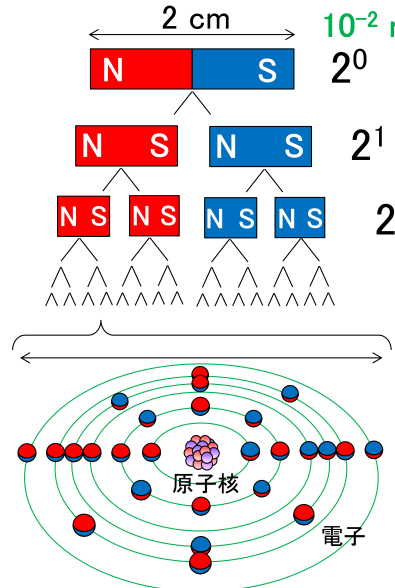
$$m = e/1.758820088\times10^{11} = 1.602176565\times10^{-19}/1.758820088\times10^{11}$$

$$= 9.10938291\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

電子質量は極めて小さいが，間接測定（別々の測定値を使った間接的な計算）で導出できる。

# 磁気ダイポールモーメントの根源






$10^{-2}$ m オーダー

$2^0$

$2^1$ 分割数

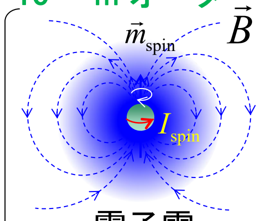
$2^2$ 分割数を増やしても一つあたりの磁石が小さくなるだけ

$10^{-10}$ m オーダー

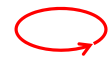
$2^{33}$

惑星の自転に相当するのが電子のスピン

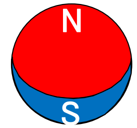
$10^{-18}$ m オーダー




電子雲



ループ電流モデル




球磁石モデル

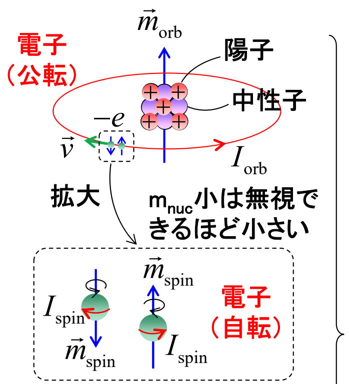
Newton ``磁石とスピン,'' pp.42–43, 2016/6. より引用

# 磁気ダイポールモーメント



磁気モーメント　軌道磁気モーメント　スピン磁気モーメント

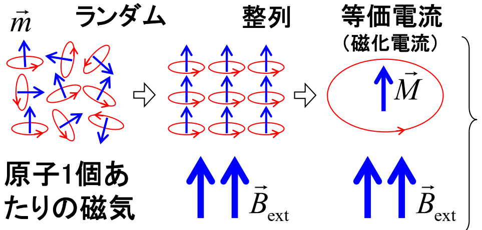
$$\vec{m} = \vec{m}_{\mathrm{orb}} + \vec{m}_{\mathrm{spin}}$$




電子の電荷は負なので，スピンの方向と電流の向きは逆

$$m_{\mathrm{spin}} = \mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.27\times10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

電子1つあたりのスピン磁気モーメント（ボーア磁子）




原子1個あたりの磁気モーメントはランダム

原子電流のループ面が常に変化するイメージ

複数原子の磁気モーメントが揃う

$$\vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}_m$$

強い磁場の発生

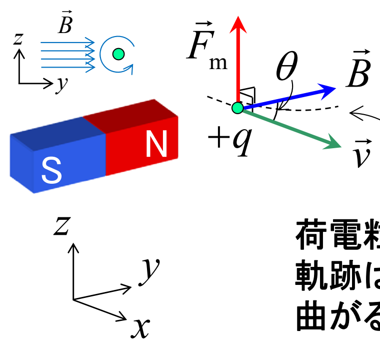
※外部磁場を切っても整列が崩れにくいものを永久磁石と呼ぶ。

原，理工系のための電磁気学，p.112，学術図書

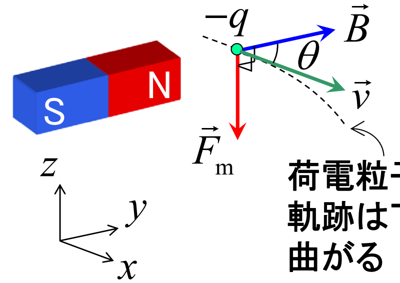
# 磁気力と磁束密度



vが光速に近くなると、電子は急に曲がれず円の接線方向に電磁波を放出する。これをシンクロトロン放射と呼ぶ。




荷電粒子の軌跡は上へ曲がる




荷電粒子の軌跡は下へ曲がる

電荷

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

磁気力[N]　荷電粒子の速度[m/s]　外積記号　磁場 [T] or [Wb/m$^2$]

【問い】 円運動している電荷に対してはどのような力が働くか考察せよ。（磁石断面の大きさと電荷の円運動半径によるが，反発か吸引される）

**磁場は電荷1Cを速度1m/sで入射したときに働く最大磁気力**

# ローレンツ力

電気力（クーロン力）　磁気力　荷電粒子の電荷量　電界　磁場

$$\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{e}} + \vec{F}_{\mathrm{m}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

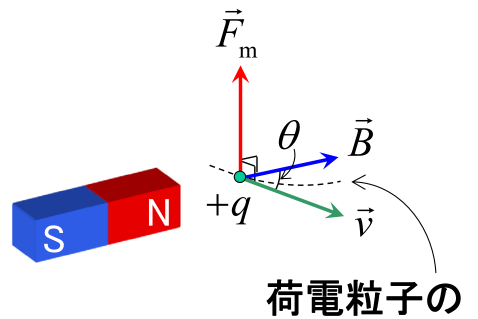
electric　magnetic　荷電粒子の速度　外積記号

単位系　[N] = [C] [N/C] + [C] [m/s] [Wb/m²]
= [C] [N/C] + [C/s] [Wb/m]
= [N/C] [C] + [A/m] [Wb]
= $\underbrace{\text{[N/C]}}_{\text{電界 E}}$ [C] + $\underbrace{\text{[N/Wb]}}_{\text{磁界 H}}$ [Wb]

ローレンツ力の定性的な説明は可能である。→電流が流れると磁場が発生するのでその磁気エネルギーが最小になるように自然の力が働く。しかし、何故運動する荷電粒子の周囲に磁場が発生するのか？誰も知らないし説明もできない。このことは万有引力がなぜあるのか？クーロン力は何故働くかを説明する理由がないことと同じである。このような事実を「法則」と呼ぶ。

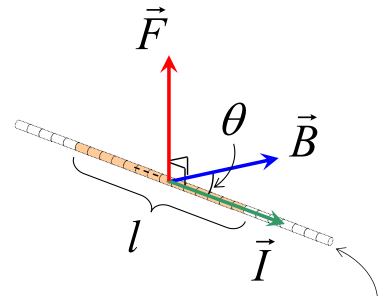


# ローレンツ力とフレミング左手則

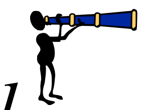



自由電子一つあたりに働く<u>ローレンツ力</u>

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



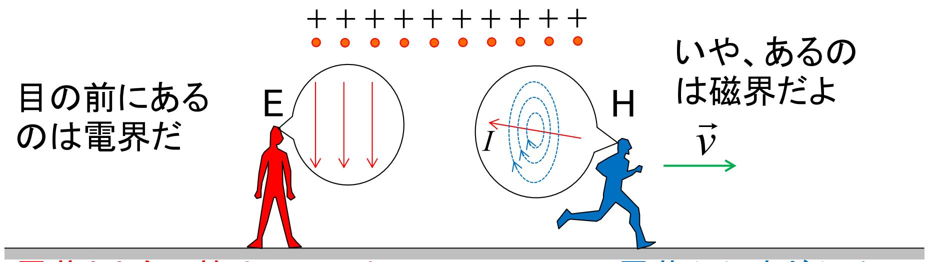

電流を自由電子の移動に置き換えて考えると<u>フレミング左手則</u>

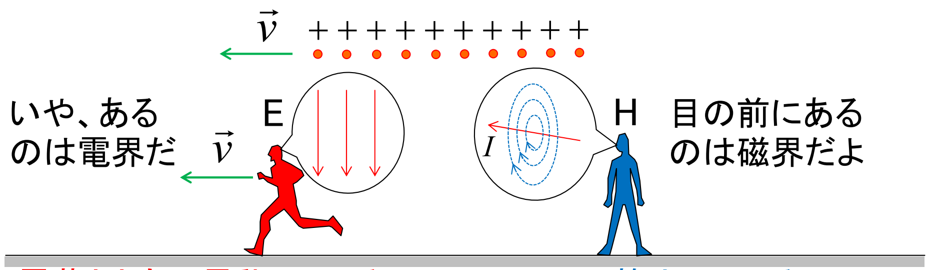


$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}l$$



# どちらの意見が正しいか？



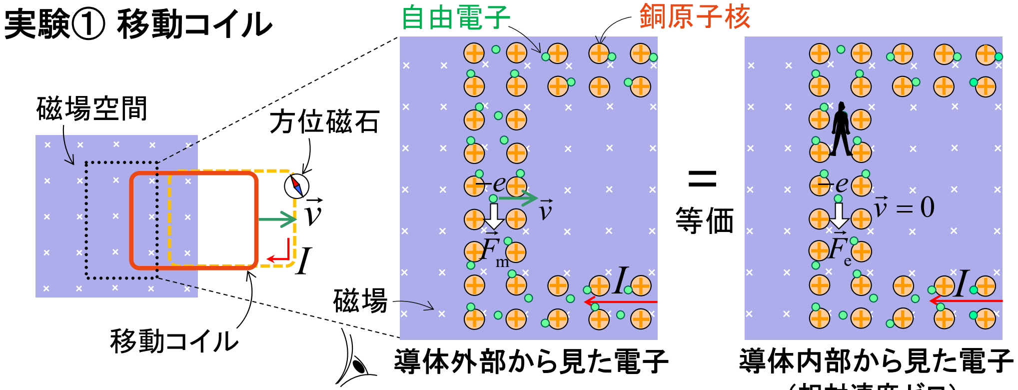

竹内, ゼロから学ぶ物理の1、2、3, p.171, 講談社 より引用

静止した＋同士の電荷は互いに反発しあう。しかし、同方向に運動している＋同士の電荷を静止している観察者が見ると、吸引力が働くように見える。



# フレミングの右手則

実験① 移動コイル




<u>原子核の立場から電子に働く力を見ると、電界が上向きに生じているように見える。</u>

$$\begin{cases} \vec{F}_{\mathrm{m}} = -e\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{f}_{\mathrm{m}} = \dfrac{\vec{F}_{\mathrm{m}}}{-e} = \boxed{\vec{v} \times \vec{B}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{F}_{\mathrm{e}} = -e\vec{E} \\ \vec{f}_{\mathrm{e}} = \dfrac{\vec{F}_{e}}{-e} = \boxed{\vec{E}} \end{cases}$$

$$\mathrm{emf} = \oint_C \vec{f}_{\mathrm{m}} \bullet d\vec{l} = \oint_C \vec{v} \times \vec{B} \bullet d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

竹内, ゼロから学ぶ物理の1、2、3, p.170, 講談社

狩野, 市村, 物理学入門 Ⅱ. 電磁気学, p.184, 東京化学同人

# フレミングの右手則

電界ベクトル　導体の速度ベクトル

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

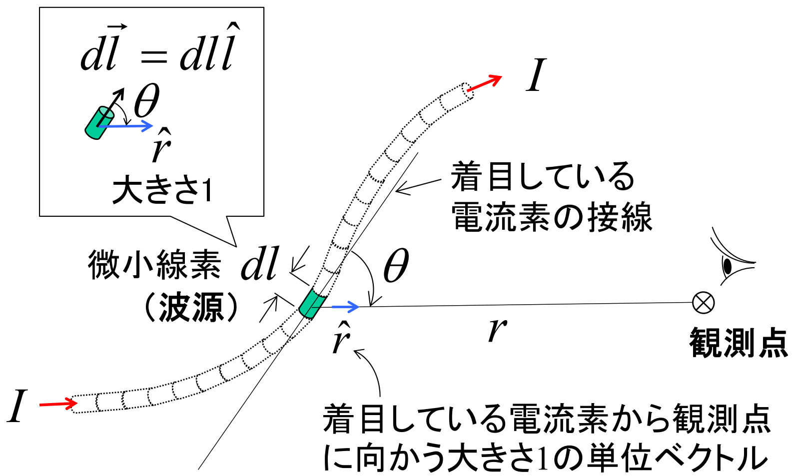
外積記号　外部磁場

[V/m] = [m/s] × [Wb/m²]

ローレンツ力の式を単位電荷にした場合と同じ。
フレミングの左手則を<u>電動機（モータ）の原理</u>と呼ぶのに対して、右手則を<u>発電機の原理</u>と呼ぶ。



# ビオ-サバールの実験




【ポイント】
電荷が作る電界とは少し事情が異なり、磁荷は単独で存在できないため、磁気の根源である電流が作る磁場について考える。



# ビオ-サバールの法則

【ベクトル形】

観測点における磁束密度ベクトル

まとめて電流素（電流　微小線素ベクトル）

外積（電流を観測点に向かう方向とその直交方向に分離し、直交成分だけ抽出）

$$d\vec{B} = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}}_{} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

電流素から観測点に向かう単位ベクトル

SI単位系で定義された定数
（$\mu_0$は真空の透磁率）

電流素から観測点までの距離

[Wb/m²] = [H/m] × [A･m] ÷ [m²]



# アンペアの法則

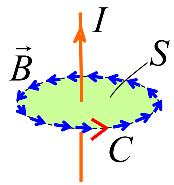
【ベクトル形】 ビオ-サバールの法則を積分形にして一般化

積分すると積分定数が付いて様々なケースが包括されるイメージ

積分路が閉じていることを示す記号　積分路上の磁束密度　積分路を構成する微小線素（方向は経路Cの方向）

真空の透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$

$$\oint_C \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{I}_{}$$




内積記号

積分が経路Cに沿った線積分であること示す記号

積分路内部に含まれる電流（右ねじ方向が正）

[Wb/m²] × [m] = [H/m] × [A]

【解説】 経路Cに沿って磁場Bを線積分（微小長さdlを掛けて総和）すると、積分路内部に含まれる電流Iを$\mu_0$倍した値に等しい。

# 磁性体版アンペアの法則

【ベクトル形】真空中のアンペアの法則に磁化電流を導入して一般化

積分路が閉じていることを示す記号

積分路上の磁界ベクトル

積分路を構成する微小線素ベクトル

磁化電流を含む

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I$$

内積記号

積分が積分路Cに沿った線積分であること示す記号

積分路内部に含まれる伝導電流(右ねじを正)

[A/m] × [m] = [A]



# インダクタンスの導出手順

これまでは自己インダクタンスLの値と、相互インダクタンスM(または結合定数 k)の値が与えられていた。今度は<u>自己インダクタンス L と相互インダクタンスM そのものを導出すること</u>※を考える。

【導出手順】

1. 往復電流 I を流す
2. <u>アンペアの法則より</u>磁界 H を導出
3. B=μHより磁束密度 B を導出
4. Φ=∫Bdsより磁束Φを導出
5. φ=NΦより磁束鎖交数φを導出
6. φ=LI から L を導出

Lを求める(目的)ため、公式(手段)を一つずつ遡って芋づる式に大本の法則まで戻るという逆操作をする。

単位電流 I=1 Aを流したときの磁束鎖交数 φ[Wb]がインダクタンスL [Wb/A]の定義

※与えられた素子定数Lから回路特性を計算するよりも、この方がはるかに重要で役に立つ。さらに進むと、電流分布I(一様でない)を導出することが求められるようになる。



# 磁性体版アンペアの法則の拡張

【ベクトル形】磁性体を含むアンペアの法則に変位電流を導入して一般化

積分路が閉じていることを示す記号

積分路上の磁界ベクトル

<u>磁化電流を含む</u>

積分路を構成する微小線素ベクトル

積分路内部に含まれる変位電流(右ねじ方向が正)

<u>分極電流を含む</u>

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I + \underbrace{\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s}}_{\text{変位電流を含む}}$$

内積記号

積分が積分路Cに沿った線積分であること示す記号

積分路内部に含まれる伝導電流(右ねじ方向が正)

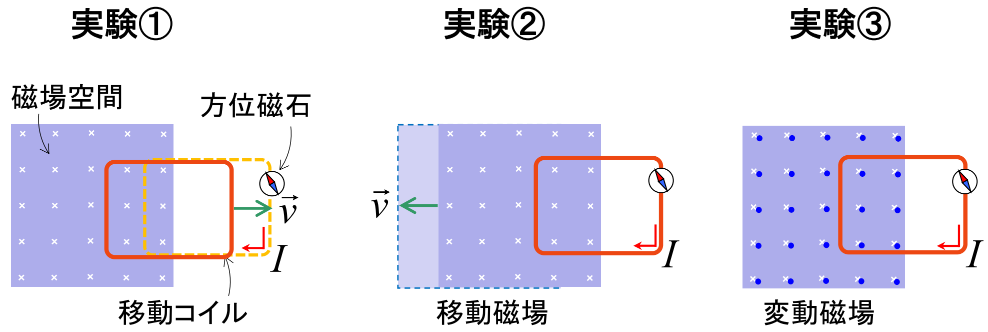
単位系 [A] = [A/m] × [m] = [A] + [C/m$^2$] × [m$^2$] ÷ [s]

この法則を別名:<u>アンペア−マクスウェルの法則</u>と呼び、<u>19世紀における最大の科学的発見</u>と言われている。



# ファラデーの実験

問:電流(電界)から磁界が作られるように、磁界から電流(電界)を作れるのでは?




3つの実験の共通点は?

コイルを貫く磁束が<u>時間的に変化したときのみ、</u>

コイルに電流が流れる=コイルに起電力が発生する。

(コイル導体がなくても、空間には電界が発生している)

J. D. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, third ed., p.301

# 磁束 magnetic flux

## 磁束とは・・・磁場の流束の略

磁束

積分面上の磁束密度

積分面を構成する微小面素

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{s}$$

magnetic

内積記号

積分が積分面S上の面積分であること示す記号

単位系　[Wb] = [Wb/m$^2$] [m$^2$]



# 磁束鎖交数

## 磁束鎖交数とは・・・コイルの巻数と磁束の積

磁束鎖交数

磁束

$$\varphi = N\Phi_{\mathrm{m}}$$

巻数

単位系　[Wb] = [Turn] [Wb]



# ファラデーの法則

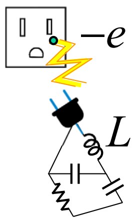
起電力

変化を妨げる向き

磁束鎖交数

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

時間




単位系　[V] = [Wb] ÷ [s]



# ファラデーの法則（積分形）

【ベクトル形】保存場の性質に変動磁場を導入して一般化

積分路が閉じていることを示す記号

電界

積分路を構成する微小線素

時間（偏）微分

磁束密度

積分路を構成する微小面素

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \bullet d\vec{s}$$

内積記号

内積記号

積分が積分路Cに沿った線積分であること示す記号

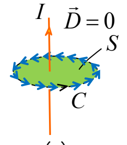
積分が左辺積分路Cの内側に囲まれた開いた面積分であること示す記号

単位系　[V] = [V/m] × [m] = [Wb/m$^2$] × [m$^2$] ÷ [s]

電気エネルギーが磁界のエネルギーに変換されているので、保存場の性質は成り立たない

# 電磁界方程式(積分形)

Static magnetic field



(a)

## アンペアの法則

Ampere's law

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = I$$

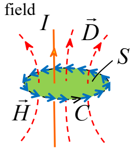
[A/m][m]=[A]
[N/Wb][m]=[J/Wb]

$\vec{F}_m = Q_m\vec{H}$ 単位磁荷(もしあれば)あたりの仕事

閉路Cに沿って磁界を一周積分すると、閉路内部に含まれる電流に等しい。

↓拡張

Electromagnetic field



(a)'

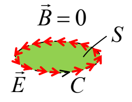
## アンペア-マクスウェルの法則(拡張アンペアの法則)

Ampere-Maxwell's law

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$$

閉路Cに沿って磁界を一周積分すると、閉路内部に含まれる電束の時間変化と伝導電流に等しい。

Electrostatic field



(c)

## 保存場の性質

Conservative field

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = 0$$

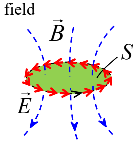
[V/m][m]=[V]
[N/C][m]=[J/C]

$\vec{F}_e = q\vec{E}$ 単位電荷あたりの仕事

閉路Cに沿って電界を一周積分する(=した仕事とされる仕事の和)と、ゼロになる。

↓拡張

Electromagnetic field



(c)'

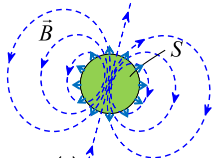
## ファラデーの法則

Faraday's law

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$$

閉路Cに沿って電界を一周積分すると、閉路内部に含まれる磁束の時間変化に等しい。

Static magnetic field & Electromagnetic field



(b)

## 磁束密度に関するガウスの法則

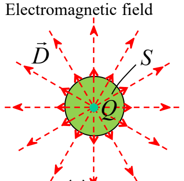
Gauss's law on the magnetic flux

$$\oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = 0$$

[Wb/m²][m²]=[Wb]

閉面S上で磁束を総和すると、ゼロになる。(磁荷は単独で存在しない)

Electrostatic field & Electromagnetic field



(d)

## ガウスの法則

Gauss's law

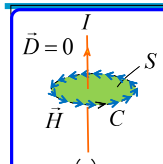
$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q$$

[C/m²][m²]=[C]

閉面S上で電束を総和すると、閉面内部に含まれる真電荷に等しい。



# 電磁界方程式(微分形)



(a)

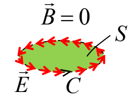
## アンペアの法則

Ampere's law

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$$

[1/m][A/m]=[A/m²]
[1/m][N/Wb]=[N/Wbm]

磁界のローテーションをとると電流密度になる。



(c)

## 保存場の性質

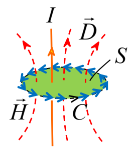
Conservative field

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

[1/m][V/m]=[V/m²]
[1/m][N/C]=[N/Cm]

電界のローテーションをとると、ゼロになる。

↓拡張



(a)'

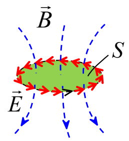
## アンペア-マクスウェルの法則(拡張アンペアの法則)

Ampere-Maxwell's law

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

磁界のローテーションをとると、電束密度の時間変化と電流密度になる。

↓拡張



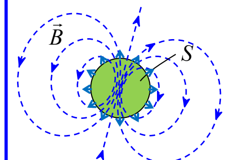
(c)'

## ファラデーの法則

Faraday's law

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

電界のローテーションをとると、磁束密度の時間変化(減少方向)になる。



(b)

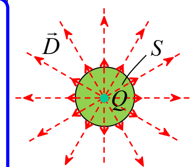
## 磁束密度に関するガウスの法則

Gauss's law on the magnetic flux

$$\nabla\bullet\vec{B} = 0$$

[1/m][Wb/m²]=[Wb/m³]

磁束密度の発散は、ゼロになる。(磁荷は単独で存在しない)



(d)

## ガウスの法則

Gauss's law

$$\nabla\bullet\vec{D} = \rho$$

[1/m][C/m²]=[C/m³]

電束密度の発散は、真電荷密度に等しい。

※微分形の導出は積分形の方程式に次の定理(ストークスの定理とガウスの発散定理)を使う。

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\bullet d\vec{s} = \oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} \quad \text{:Stokes's theorem} \qquad \int_V \nabla\bullet\vec{A}\,dv = \oint_S \vec{A}\bullet d\vec{s} \quad \text{:Gauss's theorem}$$



# 積分形から微分形の導出1

**アンペア-マクスウェルの法則より**

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$$

**左辺にストークスの定理を適用**

$$\int_S (\nabla\times\vec{H})\bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$$

**積分記号内を比較して**

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

**ファラデーの法則も上記と同様にして**

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

**ガウスの法則より**

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q$$

**左辺にガウスの定理を適用して**

$$\int_V \nabla\bullet\vec{D}\,dv = Q$$

**右辺を電荷密度 ρ[C/m³] で表現すると**

$$\int_V \nabla\bullet\vec{D}\,dv = \int_V \rho\,dv$$

**積分記号内を比較して**

$$\nabla\bullet\vec{D} = \rho$$

**磁気ガウスの法則も上記と同様にして**

$$\nabla\bullet\vec{B} = 0$$

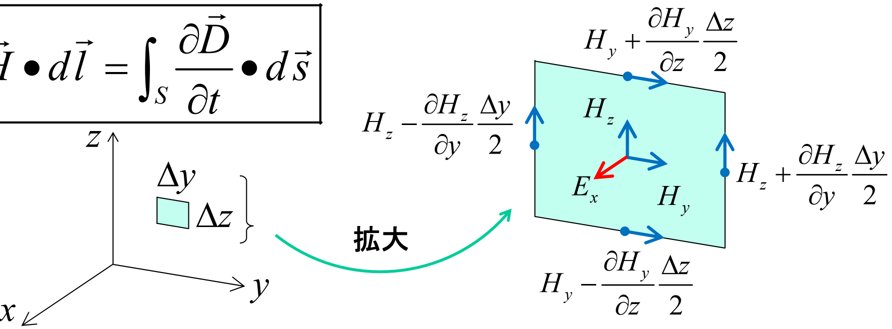
問:なぜ積分形そのままではなく微分形を使うか?



# 積分形から微分形の導出2

**積分を微小領域で直接計算する方法(アンペア-マクスウェルの法則)**

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s}}$$




**左辺**

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y + \left(H_z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z - \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y - \left(H_z - \frac{\partial H_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)}_{\text{単位面積当たりの循環の極限値}} \equiv (\nabla\times\vec{H})_x$$

**右辺**

$$\int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s} = \int_S \frac{\partial D_x}{\partial t}ds = \frac{\partial D_x}{\partial t}\Delta y\Delta z$$

**左辺=右辺より**

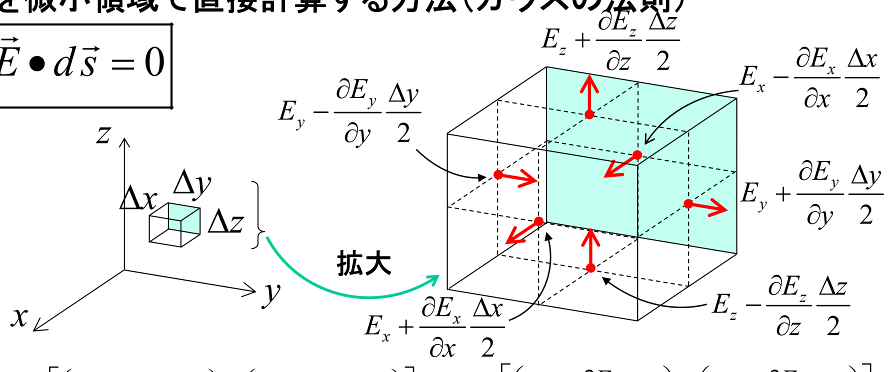
$$\boxed{(\nabla\times\vec{H})_x = \frac{\partial D_x}{\partial t}}$$

# 積分形から微分形の導出2



積分を微小領域で直接計算する方法(ガウスの法則)

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s}=0}$$




左辺

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s}=\left[\left(E_x+\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)-\left(E_x-\frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta y\Delta z+\left[\left(E_y+\frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)-\left(E_y-\frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta z\Delta x$$

$$+\left[\left(E_z+\frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)-\left(E_z-\frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\right]\Delta x\Delta y=\underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\text{単位体積当たりの流束の極限値}}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\equiv\nabla\bullet\vec{E}$$

左辺=右辺より

$$\boxed{\nabla\bullet\vec{E}=0}$$

# マクスウェルの方程式



**積分形**

$$\begin{cases}\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}\\ \oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}\\ \oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=Q\\ \oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0\end{cases}$$

⟺ どちらでも同じ意味

**微分形**

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\bullet\vec{D}=\rho\\ \nabla\bullet\vec{B}=0\end{cases}$$

例） $\boxed{\int dy=\int xdx}\Leftrightarrow dy=xdx\Leftrightarrow\boxed{\frac{dy}{dx}=x}$

未知関数yを求める方程式に違いはない

# 電磁気学法則間の上位互換性



電磁界の基本方程式(マクスウェルの方程式)最上位バージョン※

$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$
ファラデーの法則

$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\bullet d\vec{s}$
アンペア−マクスウェルの法則

$\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$
変位磁束

一般化(拡張)

$\oint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0$
磁気ガウスの法則

一般化(拡張)

$\int_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{s}$
変位電流

静電界の基本方程式

$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l}=0$
保存場の性質
(エネルギー保存則)

$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=Q$
ガウスの法則

$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=I$
アンペアの法則

静磁界の基本方程式

一般化(変形)

一般化(変形)

上位互換とは・・・
Windows XPで動くソフトウェアは、Windows 7でも使えるイメージ

$\vec{F}_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$
クーロンの法則

$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$
ビオ−サバールの法則

※ 上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなるが、様々な応用ができるようになる。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単だが、そのままでは応用されにくい。

# 確認テスト



1. 電磁気学が対象としている力として正しいものは:
2. 静磁界の定義として正しいのは:
3. 空間3次元+時間1次元の問題を何次元時空問題と呼ぶか。
4. 電磁気学の偉人とされる人物の中で最も短命なのは:
5. 19世紀における最大の科学的発見と呼ばれているのは何か。
6. 導体に強制的に与えた電荷はどのように分布するか。
7. 表皮効果として正しいのは:
8. 電磁気学において現在主流の計算問題が行われるようになったのはいつか:
9. 地球を巨大磁石として考えると、南極側にあるのは磁石の何極か:
10. 磁気の根源として正しくないものは:
11. 運動する荷電粒子にはたらく磁気力の方向は、磁場の方向と常にどのような関係にあるか。
12. ローレンツ力の利用例として正しくないものは:
13. フレミング左手則の説明として適切なのは:
14. 運動している電荷を静止している人が観察したときに見えるのは:
15. ビオ−サバールの法則として正しくないのは:
16. 磁性体版アンペアの法則が考慮していないのは:
17. インダクタンスの定義として正しいのは :
18. アンペア−マクスウェルの法則の説明として正しいのは :
19. 磁束の説明として正しくないのは:
20. 電源コンセントを引き抜いたときに火花が出る理由として正しいのは:
21. ファラデーの法則の説明として正しいのは:
22. 静磁界の基本方程式として正しいものは:
23. 静電界の基本方程式として正しいものは:
24. マクスウェルの方程式とは: