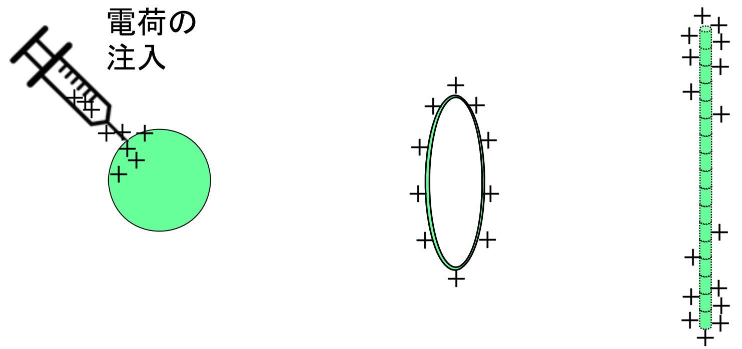
帯電導体の電荷分布

1st. 2011/11/10
Lst. 2020/11/09

帯電導体の電荷分布

【例題】次のケースで、電荷はどのように分布するか？



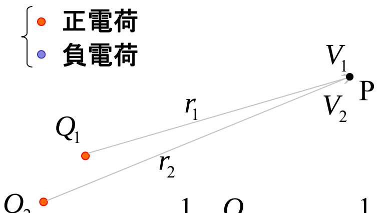
(1) 導体球
または導体球殻

(2) 導体円環

(3) 導体棒

Answer： (1) クーロン力によって互いに反発するため、導体球表面に電荷が均一に分布する。(2) 同じ理由で円環の外周に均一に分布する。(3) 同じ理由で導体棒のエッジに集中する。(均一にはならない。)

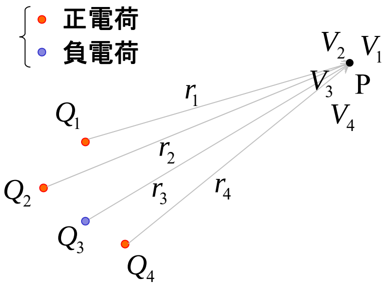
点電荷が作る電位の重ね合わせ



$$V_{\mathrm{P}} = V_1 + V_2$$

$$V_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} \quad (2)$$

$$V_{\mathrm{P}_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r_1}, V_{\mathrm{P}_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} \quad (1)$$



$$V_{\mathrm{P}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} \quad (3)$$

電位の重ね合わせ

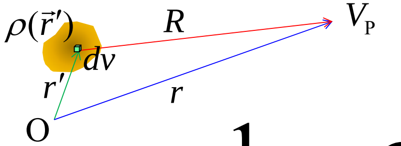
i 番目の電荷 [C]

$$V_{\mathrm{P}} = \sum_i \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{Q_i}{r_i}$$

点電荷から観測点
Pまでの距離 [m]

**任意点の電位は、点電荷Qが作る電位の
重ね合わせで表現される**

電位の総和(一般化)



位置rにおける電位 [V]

位置r' における電荷密度 [C/m³]

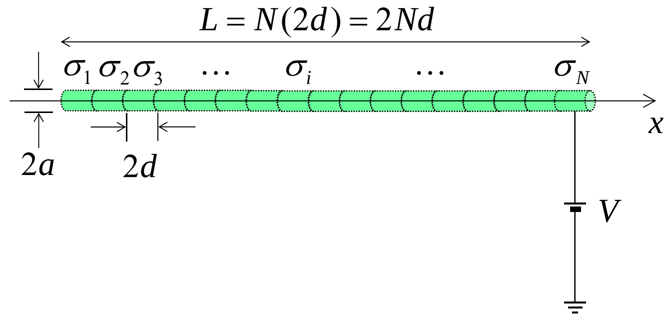
$$V_P(\vec{r}) = \underbrace{\int_V}_{\text{重ね合わせ領域}} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv$$

点電荷から観測点Pまでの距離 [m]

任意点の電位は、微小電荷ρ dvが作る電位の積分で表現される

電荷分布の計算モデル

【演習2】長さ1 mの導体棒に1 Vの電圧を加えたとき、導体上の電荷密度分布σ[C/m²]を求めよ。ただし，導体半径はa=1 mm とせよ。分割幅は各自で決めよ。

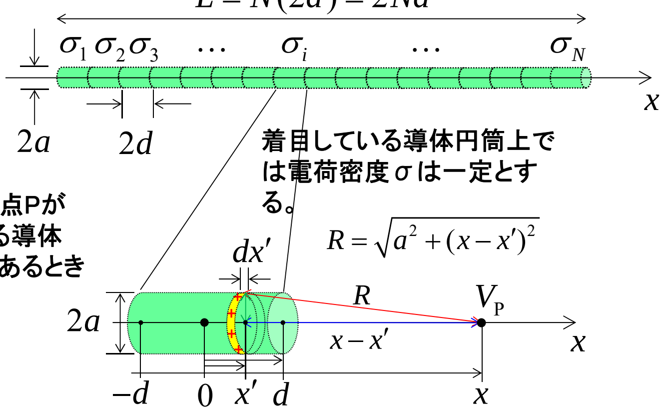


N. N. Rao, “Elements of Engineering Electromagnetics Sixth ed.,” p. 741, Pearson Prentice Hall

J. D. Kraus, D. A. Fleisch, “Electromagnetics with applications Fifth ed.,” pp.558–559, McGraw-Hill

問題の定式化1

$\sigma[\mathrm{C/m^2}]$ 面電荷密度

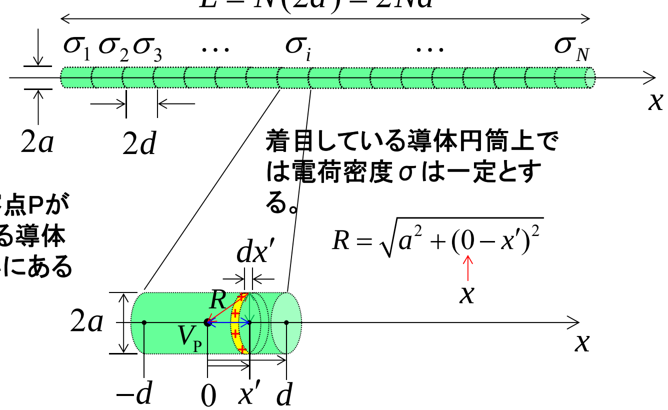


電位の観察点Pが着目している導体円筒の外にあるとき

$$\boxed{V_P = \int_{x'=-d}^{d} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma_i}{R} a\, d\varphi\, dx'} \quad (1)$$

x=0とすれば、着目している円筒導体が自身の中心に作る電位になる。

問題の定式化2



電位の観察点Pが着目している導体円筒の中心にあるとき

$$\boxed{V_P = \int_{x'=-d}^{d} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma_i}{r} a\, d\varphi\, dx'} \quad (2)$$

問題の定式化3(解析的な積分)

電位を求める積分は以下のようにして計算できる。

$$V_P=\int_{x'=-d}^{d}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_i}{R}ad\varphi dx' \qquad (1)$$

未知数は積分記号内の面電荷密度σ(積分方程式と呼ぶ)

$$=\frac{\sigma_i}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\int_{x'=-d}^{d}\frac{1}{\sqrt{a^2+(x-x')^2}}dx'$$

$$=\frac{2\pi\sigma_i a}{4\pi\varepsilon_0}\boxed{\int_{x'=-d}^{d}\frac{1}{\sqrt{a^2+(x-x')^2}}dx'}$$

積分公式

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C \qquad (2)$$

$$=\frac{\sigma_i a}{2\varepsilon_0}\left[-\ln\left\{x+\sqrt{a^2+(x-x')^2}-x'\right\}\right]_{x'=-d}^{d}$$

$$=\sigma_i\frac{a}{2\varepsilon_0}\ln\frac{x+d+\sqrt{a^2+(x+d)^2}}{x-d+\sqrt{a^2+(x-d)^2}}$$

$$=\sigma_i f(x)$$

下の式でx=0とすれば、電位の観察点が着目している導体円筒の中心にあるときでも使える。

ただし、f(x)を右のように置いた。

$$f(x)=\frac{a}{2\varepsilon_0}\ln\frac{x+d+\sqrt{a^2+(x+d)^2}}{x-d+\sqrt{a^2+(x-d)^2}} \qquad (3)$$

電磁気学でよく使う積分公式

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(1)$$

を証明せよ。

$$f(x)=x+\sqrt{a^2+x^2},\quad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

と置くと、

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

もとの式の分子・分母に $x+\sqrt{a^2+x^2}$ を掛けると、

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}dx$$

$$=\int\frac{\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

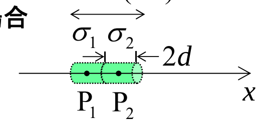
$$=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$$

証明終わり。

問題の定式化4(連立方程式)

N=2の場合

$L=2(2d)=4d$

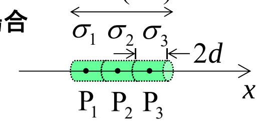


$$\begin{cases}V_{P_1}=\sigma_1 f(0)+\sigma_2 f(-2d)\\ V_{P_2}=\sigma_1 f(2d)+\sigma_2 f(0)\end{cases} \qquad (1)$$

観測点P_1に作られる電位は、σ_1が自分の中心に作る電位と、σ_2が−2d離れた位置に作る電位の和で表される。

N=3の場合

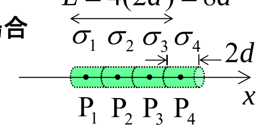
$L=3(2d)=6d$



$$\begin{cases}V_{P_1}=\sigma_1 f(0)+\sigma_2 f(-2d)+\sigma_3 f(-4d)\\ V_{P_2}=\sigma_1 f(2d)+\sigma_2 f(0)+\sigma_3 f(-2d)\\ V_{P_3}=\sigma_1 f(4d)+\sigma_2 f(2d)+\sigma_3 f(0)\end{cases} \qquad (2)$$

N=4の場合

$L=4(2d)=8d$

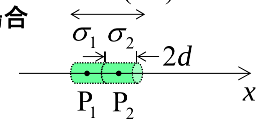


$$\begin{cases}V_{P_1}=\sigma_1 f(0)+\sigma_2 f(-2d)+\sigma_3 f(-4d)+\sigma_4 f(-6d)\\ V_{P_2}=\sigma_1 f(2d)+\sigma_2 f(0)+\sigma_3 f(-2d)+\sigma_4 f(-4d)\\ V_{P_3}=\sigma_1 f(4d)+\sigma_2 f(2d)+\sigma_3 f(0)+\sigma_4 f(-2d)\\ V_{P_4}=\sigma_1 f(6d)+\sigma_2 f(4d)+\sigma_3 f(2d)+\sigma_4 f(0)\end{cases} \qquad (3)$$

問題の定式化5(マトリクス表示)

N=2の場合

$L=2(2d)=4d$

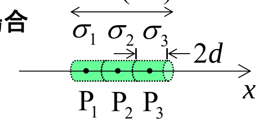


$$\begin{bmatrix}f(0) & f(-2d)\\ f(2d) & f(0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}V_{P_1}\\ V_{P_2}\end{Bmatrix} \qquad (1)$$

[ ]は行列、{ }は列ベクトルを示す。行列には一定の規則性があることが分かる。

N=3の場合

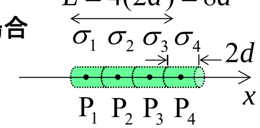
$L=3(2d)=6d$



$$\begin{bmatrix}f(0) & f(-2d) & f(-4d)\\ f(2d) & f(0) & f(-2d)\\ f(4d) & f(2d) & f(0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}V_{P_1}\\ V_{P_2}\\ V_{P_3}\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

N=4の場合

$L=4(2d)=8d$



$$\begin{bmatrix}f(0) & f(-2d) & f(-4d) & f(-6d)\\ f(2d) & f(0) & f(-2d) & f(-4d)\\ f(4d) & f(2d) & f(0) & f(-2d)\\ f(6d) & f(4d) & f(2d) & f(0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}V_{P_1}\\ V_{P_2}\\ V_{P_3}\\ V_{P_4}\end{Bmatrix} \qquad (3)$$

計算手順の一例（N=4の場合）

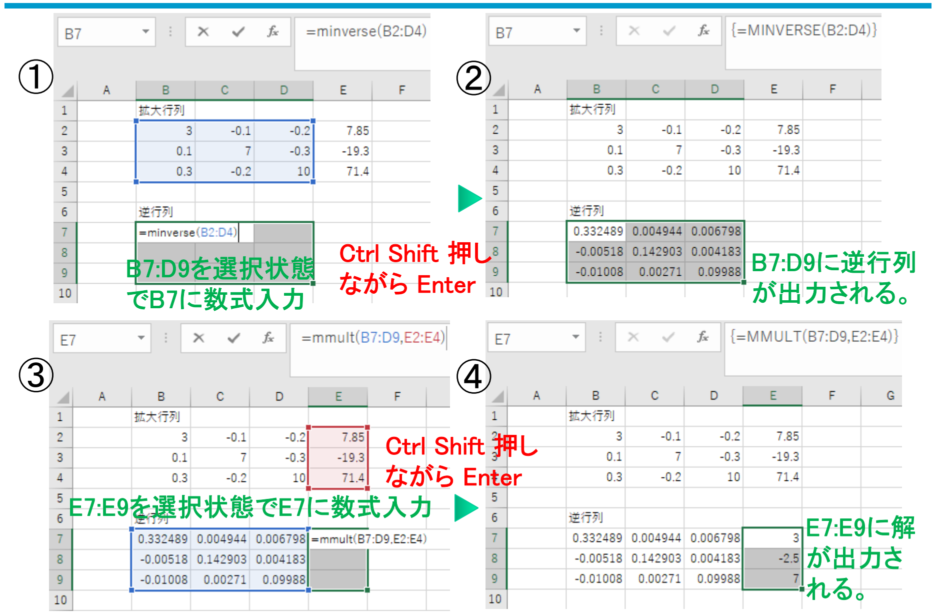
$$f(x)=\frac{a}{2\varepsilon_0}\ln\frac{x+d+\sqrt{a^2+(x+d)^2}}{x-d+\sqrt{a^2+(x-d)^2}} \quad (1)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		計算条件							
2	計算条件	a [m]	0.001						
3		L [m]	1						
4		N	4						
5		ε 0 [F/m]	8.854E-12						
6		d [m]=L/2N	0.125						
7		a/2 ε 0	56471651.2						
8									電圧
9		x [m]	f(x)		行列要素（4×4） 行列要素				列ベクトル
10	-6	-0.75	19001125.1		623613837.5	62039646.87	28847102.21	19001125.09	1
11	-4	-0.5	28847102.2		62039646.87	623613837.5	62039646.87	28847102.21	1
12	-2	-0.25	62039646.9		28847102.21	62039646.87	623613837.5	62039646.87	1
13	0	0	623613838		19001125.09	28847102.21	62039646.87	623613837.5	1
14	2	0.25	62039646.9		逆行列				解ベクトル
15	4	0.5	28847102.2		1.6226E-09	-1.54146E-10	-5.60691E-11	-3.67313E-11	1.37566E-09
16	6	0.75	19001125.1		-1.54146E-10	1.63642E-09	-1.50089E-10	-5.60691E-11	1.27611E-09
17		x	f(x)		-5.60691E-11	-1.50089E-10	1.63642E-09	-1.54146E-10	1.27611E-09
18					-3.67313E-11	-5.60691E-11	-1.54146E-10	1.6226E-09	1.37566E-09
19					逆行列				解

f(x)は自作関数で定義することもできる。詳細は、

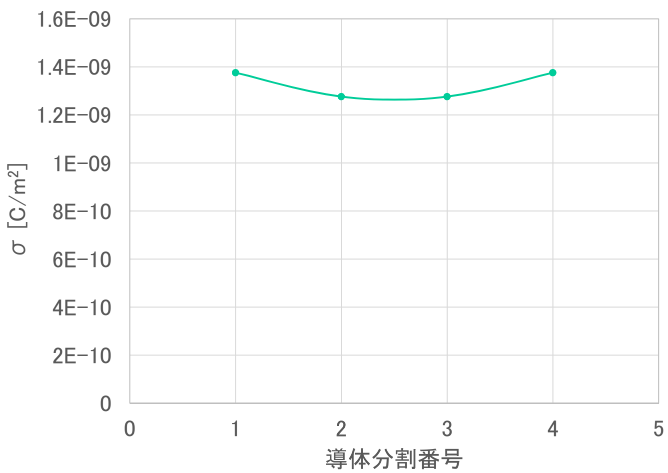
https://www.kusamalab.org/lecture/excelmacro/excelmacro.html

Excelによる連立方程式の解法



計算結果（N=4の場合）

【解答例】 エクセルを使って数式を入力し、計算結果を描画する。



電荷分布の計算結果

【解答例】 Mathematica でプログラミングした結果