応用電磁気学課題レポート

多導体系のキャパシタンスの計算

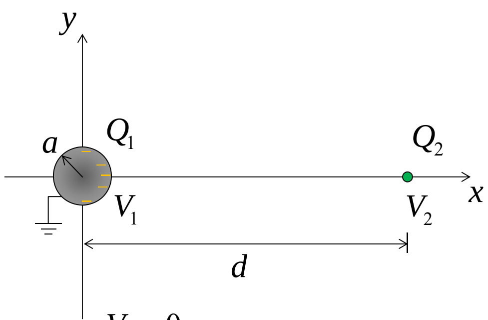
1st. 2018/05/21
Lst. 2018/06/28

課題

1. 演習教科書応用問題3.2において，半径aの導体球を導体1，点電荷Qを導体2とした場合，導体1に誘導される電荷を電位係数による考え方で求めよ。
2. 演習教科書応用問題3.6において，C_1=1 μF, C_2=2 μF, V_1=4 V, V_2=1 Vとしたときの接続前後のエネルギー変化を計算し，失われたエネルギーがどこにいったか考察せよ。

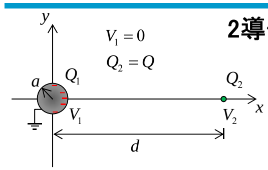
提出期限： 次回講義5/21（月）開始時
提出方法： A4用紙1枚以内（ワード可です）
注意： 学生同士の相談は推奨しますが，ここでの考察とは文献等を調べたり，ディスカッションを通して考え推察し，自分の言葉で説明することを指します。

1. の計算モデル



$V_1 = 0$
$Q_2 = Q$

電位係数による計算



2導体の電位方程式

$$V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2$$
$$V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2$$

電位係数

$$p_{11} = \left.\frac{V_1}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{Q_1/4\pi\varepsilon_0 a}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$p_{12} = \left.\frac{V_1}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{Q_2/4\pi\varepsilon_0 d}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$p_{21} = \left.\frac{V_2}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{Q_1/4\pi\varepsilon_0 d}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$p_{22} = \left.\frac{V_2}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{Q/4\pi\varepsilon_0 0}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 0} = \infty$$

マトリクス形式にすると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} & \infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

条件1
$V_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} & \infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \boxed{Q} \end{bmatrix}$$

$Q_2 = Q$
条件2

第1行より、

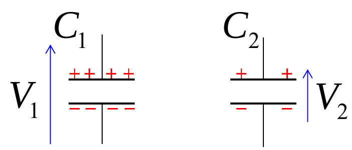
$$0 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

従って、

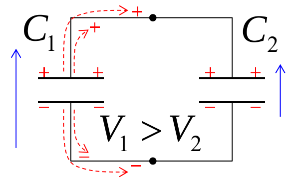
$$\boxed{Q_1 = -\frac{a}{d}Q}$$

2. の計算モデル

前

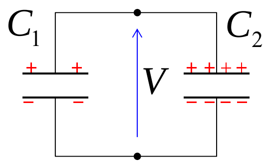


接続
直後



電荷の移動

後



C_2の充電エネルギーのちょうど2倍のエネルギーがC_1（電源に相当）から供給される必要がある。

数値具体例の計算

$$\begin{cases} C_1 = 1\,\mu\mathrm{F} & V_1 = 4\ \mathrm{V} \\ C_2 = 2\,\mu\mathrm{F} & V_2 = 1\ \mathrm{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1\,\mu\mathrm{F} \\ C_2 = 2\,\mu\mathrm{F} \end{cases} \quad V = 2\ \mathrm{V}$$

$W_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2$, $W_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2$, $Q_1 = C_1V_1$, $Q_2 = C_2V_2$

	前	後	増減
W_1 [μJ]	8	2	-6
W_2 [μJ]	1	4	+3
W=W_1+W_2 [μJ]	9	6	-3 ※
V_1 [V]	4	2	-2
V_2 [V]	1	2	+1
V [V]	-	2	-
Q_1 [μC]	4	2	-2
Q_2 [μC]	2	4	+2
Q=Q_1+Q_2 [μC]	6	6	0

$W_1' = \frac{1}{2}C_1V^2$, $W_2' = \frac{1}{2}C_2V^2$, $V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$, $Q_1' = C_1V$, $Q_2' = C_2V$

※失われた3Jは、電荷の一部がC_1からC_2へ移動する際に流れる電流Iが配線の抵抗分Rを通ることにより、$P=RI^2$の熱として消費される。

回路の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$$I = I_C + I_R \quad \cdots(1)$$

ここで，

$$I_C = \frac{dQ}{dt},\ I_R = \frac{v}{R} = Gv,\ Q = Cv \quad \cdots(2)$$

を式 (1) に代入すると

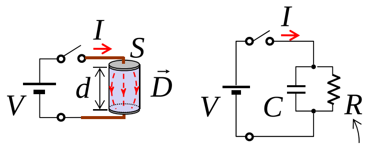
$$I = \frac{dQ}{dt} + Gv = C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad \cdots(3)$$

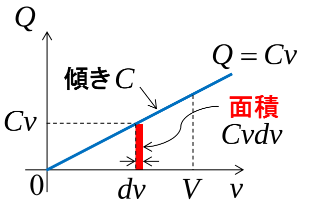
両辺に vdt を掛けると

$$\underbrace{vIdt}_{\text{電源がした仕事}} = \underbrace{Cvdv}_{\text{dv 上がったことで蓄えられたエネルギー}} + \underbrace{\frac{v^2}{R}dt}_{\text{抵抗の発熱（ジュール熱）}} \quad \cdots(4)$$

（面積 Cvdv に等しい）

等価回路





コンデンサに加える電圧 v を 0 → V に増やしたとき，コンデンサ全体の蓄積エネルギーは

$$W_e = \int_0^V Cvdv = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \quad [\mathrm{J}] \quad \cdots(5)$$

ただし，電池のした仕事は電源が一定値なので

$$W_s = QV \quad [\mathrm{J}] \quad \cdots(6)$$

充電の過渡現象1

キルヒホッフの電流則より

$$V - \frac{q}{C} - IR = 0 \quad \cdots(1)$$

t=0でq=0なので

$$I_0 = \frac{V}{R} \quad \cdots(2)$$

このとき電圧降下はすべて抵抗で生じる。tが十分大きくなるとコンデンサには最大電荷量Qに帯電し，それ以上電流は流れなり，次の定常状態になる。

$$Q = CV \quad \cdots(3)$$

(1)をtで微分すると，

$$\frac{d}{dt}\left(V - \frac{q}{C} - IR\right) = 0 \quad \cdots(4)$$

$$0 - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} - R\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\boxed{R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0}$$

Iに関する1階常微分方程式

$$RdI + \frac{I}{C}dt = 0$$

$$\frac{dI}{I} + \frac{dt}{CR} = 0$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{CR}dt \quad \cdots(4)'$$

t=0で$I=I_0$であり，CR=τ が定数であることを使えば両辺定積分できるので，

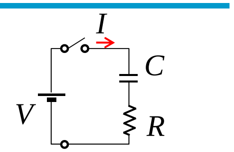
$$\int_{I=I_0}^{I} \frac{1}{I}dI = -\frac{1}{CR}\int_{t=0}^{t} dt \quad \cdots(5)$$

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{CR}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{CR}} \quad \cdots(5)'$$

$$\boxed{I = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}}$$



配線抵抗

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.799, 学術図書

充電の過渡現象2

I=dq/dtであるから(5)' より

$$\boxed{\frac{dq}{dt}=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}}\quad\cdots(6)$$

qに関する
1階常微分方程式

$$dq=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}dt\quad\cdots(6)$$

t=0でq=0であるから両辺定積分すると,

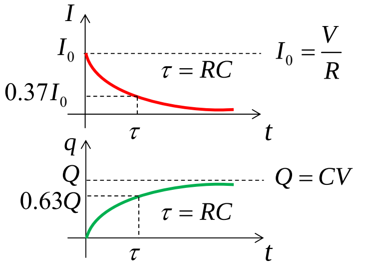
$$\int_{q=0}^{q}dq=\frac{V}{R}\int_{t=0}^{t}e^{-\frac{t}{CR}}dt\quad\cdots(7)$$

$$q=\frac{V}{R}\left[-RCe^{-\frac{t}{CR}}\right]_{t=0}^{t}$$

$$q=-CV\left(e^{-\frac{t}{CR}}-1\right)$$

$$q=CV\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

$$\boxed{q=Q\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)}\quad\cdots(7)'$$



所で，電池がした仕事は

$$W_S=V\,[\mathrm{J/C}]\cdot Q\,[\mathrm{J/C}]=QV\,[\mathrm{J}]$$

コンデンサに蓄えられたエネルギーは

$$W_e=\frac{1}{2}CV^2\,[\mathrm{J}]$$

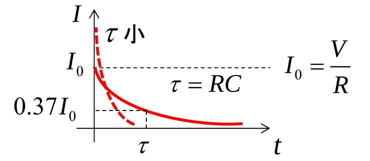
ちょうど電池のした仕事の半分になっている。

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.799, 学術図書

充電の過渡現象3

このとき，抵抗で消費されるエネルギーは

$$W_R=\int_{t=0}^{\infty}RI^2dt$$
$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(I_0e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2dt$$
$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2dt$$
$$=\int_{t=0}^{\infty}\frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$
$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty}$$
$$=-\frac{1}{2}CV^2\left(e^{-\infty}-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV$$



理想的な場合として，配線抵抗Rがゼロの場合はτ=0に漸近するため、一気にパルス状の充電電流が流れる。このときは初期電流I_0も大きくなって火花に近い形でエネルギーが空間に消費される。

コンデンサの蓄積エネルギーと同じ＝
電池のした仕事の半分がコンデンサの充電エネルギーとなり，半分が熱エネルギーとして消失

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.799, 学術図書
川勝, 川勝先生の物理授業（下巻）, pp, 72-73, 海鳴社

放電の過渡現象1

キルヒホッフの電流則より

$$IR=\frac{q}{C}\quad\cdots(1)$$

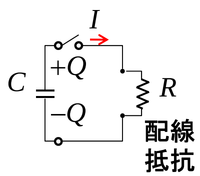
ここで，電流はコンデンサの電荷の減少率に等しいので(2)を(1)に代入して

$$I=-\frac{dq}{dt}\quad\cdots(2)$$
$$-R\frac{dq}{dt}=\frac{q}{C}\quad\cdots(3)$$
$$\frac{dq}{q}=-\frac{1}{RC}dt\quad\cdots(3)'$$

t=0のときq=Q（初期電荷）であるから，両辺を定積分すると

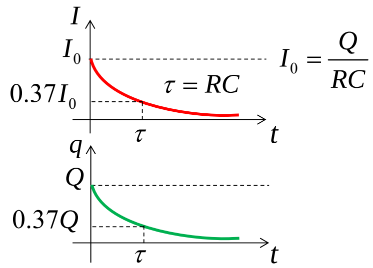
$$\int_{q=Q}^{q}\frac{dq}{q}=-\frac{1}{RC}\int_{t=0}^{t}dt\quad\cdots(4)$$
$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right)=-\frac{t}{RC}\quad\cdots(4)'$$

$$\frac{q}{Q}=e^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(4)''$$
$$q=Qe^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(4)'''$$



(2)より

$$I=-\frac{dq}{dt}=\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(5)$$
$$I=I_0e^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(5)'$$

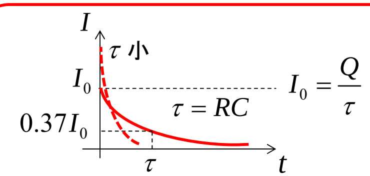


Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.801, 学術図書

放電の過渡現象2

このとき，抵抗で消費されるエネルギーは

$$W_R=\int_{t=0}^{\infty}RI^2dt\quad\cdots(6)$$
$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(I_0e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2dt$$
$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(\frac{Q}{RC}\right)^2e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$
$$=\int_{t=0}^{\infty}\frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$
$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty}$$
$$=-\frac{1}{2}CV^2\left(e^{-\infty}-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}CV^2$$



理想的な場合として，配線抵抗Rがゼロの場合はτ=0に漸近するため、一気にパルス状の放電電流が流れる。このときは初期電流I_0も大きくなって火花に近い形でエネルギーが空間に消費される。

コンデンサの蓄積エネルギーと同じ＝
放電エネルギーはすべて熱エネルギーとして消失

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.801, 学術図書